詳細解答

STEP I 2003，第 9 題

力學 • 通過定點的拋體

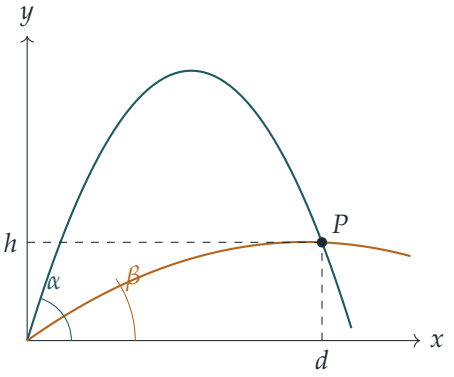
> **STEP I 2003，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q9

關鍵思路

寫出水平位移和垂直位移，消去時間，再把 $\sec^2\theta$ 換成 $1+\tan^2\theta$：軌跡方程（trajectory equation）就變成 $T = \tan\theta$ 的二次方程。此後一切都圍繞這個二次方程。有兩個角度，即有兩個相異實根，所以要看判別式（discriminant）。而 $\alpha+\beta$ 則透過 $\tan(\alpha+\beta)$ 的公式，由兩根之和與兩根之積決定。

解答

我們把質點（particle）視為只受重力作用而自由運動（不計空氣阻力），以拋射點為原點，x 軸水平指向 P，y 軸鉛垂向上。於是 P 是點 (d,h)，其中 $d>0$。我們取 $h>0$，即 P 在拋射點之上；$h\le 0$ 的情況留待最後再談。



T 的二次方程

水平速度恆為 $V\cos\theta$，而垂直方向的運動有恆定加速度 $-g$，所以在時間 t

$$x = Vt\cos\theta, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

質點在時間 $t = d/(V\cos\theta)$ 到達 $x = d$（這裏 $\cos\theta > 0$，因為質點朝 P 運動）。把它代入 y，並令 $y = h$，

$$h = d\tan\theta - \frac{gd^2}{2V^2\cos^2\theta} = dT - \frac{gd^2}{2V^2}(1+T^2),$$

其中用了 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$。現在全式乘以 $\dfrac{2V^2}{gd^2} = \dfrac{2k}{d}$：

$$\frac{2kh}{d} = 2kT - (1+T^2), \qquad \text{即} \qquad T^2 - 2kT + \frac{2kh}{d} + 1 = 0,$$

這正是所求。

兩個相異的角度

對於給定的 V（因而給定的 k），可行的拋射角（angle of projection）就是那些 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，其正切是這個二次方程的根。由於 tan 在該區間上嚴格遞增（strictly increasing），相異的實根 T 對應相異的角度。所以我們需要這個二次方程有兩個相異實根，而這恰好在判別式為正時成立：

$$4k^2 - 4\left(\frac{2kh}{d} + 1\right) > 0 \iff k^2d^2 - 2h(kd) - d^2 > 0 \iff (kd-h)^2 > h^2 + d^2,$$

這裏先乘以 $d^2 > 0$，再對 kd 配方（completing the square）。

> **想一想** 把不等式兩邊平方有時會出錯，那麼為甚麼由題目給出的條件可以推出 $(kd-h)^2 > h^2 + d^2$？

若 $kd > h + \sqrt{h^2+d^2}$，則 $kd - h > \sqrt{h^2+d^2} > 0$。兩邊皆為正數，所以平方後不等式仍然成立：$(kd-h)^2 > h^2 + d^2$。因此判別式為正，$T$ 有兩個相異的根，從而有兩個相異的拋射角。

（逆命題（converse）同樣成立。要令 $(kd-h)^2 > h^2+d^2$，另一個可能是 $kd < h - \sqrt{h^2+d^2}$，但由於 $\sqrt{h^2+d^2} > |h|$，右邊是負數，而 $kd = V^2/g > 0$。所以當且僅當 $kd > h + \sqrt{h^2+d^2}$ 時，才可以有兩個角度。）

兩個角度都確實在水平線之上。兩根之和為 $2k > 0$，兩根之積為 $1 + 2kh/d > 0$（因為 $h > 0$），所以兩根皆為正數。

兩角之和

設 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 為兩根。由二次方程可得

$$\tan\alpha+\tan\beta=2k,\qquad \tan\alpha\tan\beta=1+\frac{2kh}{d}.$$

兩根之積不等於 1（因為 $kh/d\neq 0$），所以 $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，複角公式（compound-angle formula）適用：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2k}{-2kh/d}=-\frac{d}{h}.$$

留意 k 已經約去：兩角之和與速率無關。

> **想一想** $\tan(\alpha+\beta)=-d/h$ 有無限多個解。哪一個才是 $\alpha+\beta$？

我們已證明 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$。此外 $\tan(\alpha+\beta)<0$，所以 $\alpha+\beta$ 位於 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 之內。在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 內正切為 $-d/h$ 的角只有一個，就是 $\pi-\arctan(d/h)$，因為 $\arctan(d/h)\in(0,\frac{\pi}{2})$，而且 $\tan(\pi-u)=-\tan u$。因此

$$\alpha+\beta=\pi-\arctan\left(\frac{d}{h}\right),$$

這正是所求。

這個結果有一個漂亮的看法。$\arctan(d/h)$ 是 OP 與向上鉛垂線之間的夾角，所以 $\pi-\arctan(d/h)=\frac{\pi}{2}+\gamma$，其中 γ 是 P 的仰角（angle of elevation）。於是 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}$：兩個拋射方向關於 OP 與鉛垂線夾角的角平分線對稱。

驗算

- 若 $h=0$（目標在同一水平），公式給出 $\alpha+\beta=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$：這就是大家熟悉的、射程（range）相同的一對餘角。
- 取 $d=3$、$h=4$、$k=4$。則 $kd=12>4+5$，兩根為 $T=4\pm\sqrt{13/3}$，得出 $\alpha\approx 1.4078$ 和 $\beta\approx 1.0903$。所以 $\alpha+\beta\approx 2.4981$，等於 $\pi-\arctan(0.75)\approx 2.4981$。
- 對數千組隨機的 d、h 和 k，分別以兩個角度對飛行過程作數值模擬，軌跡都通過 (d,h)，並印證了該條件和兩角之和。

常見錯誤

- 忘記 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$，以致始終得不到 T 的二次方程。
- 寫成 $\alpha+\beta=\arctan(-d/h)=-\arctan(d/h)$，這是負數。反正切（inverse tangent）只會給出 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 內的角，所以必須利用 $\alpha+\beta$ 的範圍來選取正確的分支（branch）。

▶ 不加小心地取 $h < 0$（目標在拋射點之下）。這時其中一根可能是負數，而正確的一般結論是 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \arctan(h/d)$。只有當 $h > 0$ 時，它才與題目中的形式一致。

STEP 之外

在臨界情況 $kd = h + \sqrt{h^2 + d^2}$，兩個角度合而為一，這個情況描繪出以速率 V 拋射的所有軌跡的包絡線（envelope）：「安全拋物線」（parabola of safety）$y = \dfrac{V^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2V^2}$。在它之內的點有兩種方法可以擊中，在它之上的點只有一種方法，在它之外的點則完全無法擊中。曲線族的包絡線，可以把一條方程與它對參數的導數聯立求解而得出，在微分方程（differential equations）和光學中還會再次出現。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是以這種嚴謹的態度講解拋體運動和約束運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。