詳細解答

STEP I 2003，第 8 題

純數學 • 邏輯斯諦微分方程

> **STEP I 2003，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q8

關鍵思路

把「A 轉化為 B 的速率」翻譯成導數（derivative）：它就是 B 的體積增長的速率。由於 $x = 1 - y$，這樣便得到一條只含 y 的可分離變數（separable variables）微分方程（differential equation），再用部分分式（partial fractions）完成積分。最後一部分問的是 $x = 1 - y$ 的公式會否到達零，而答案取決於一個事實：指數函數（exponential）的值永遠不會是無限大。

解答

建立方程

B 的體積是 yV，而 V 是固定的。A 以速率 $kVxy$ 轉化為 B，所以 B 的體積以該速率增加：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(yV) = kVxy \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kxy = ky(1-y),$$

這裏除以 V 並用了 $x = 1 - y$。（等價地，A 的體積以這個速率減少：$V\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -kVxy$，由於 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$，這說的是同一件事。）

解方程

開始時 $x > 0$ 且 $y > 0$，所以 $0 < y < 1$。只要 $0 < y < 1$，我們便可以除以 $y(1-y)$，把變數分離：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \int k\,\mathrm{d}t.$$

用部分分式，$\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y}$，所以

$$\ln y - \ln(1-y) = kt + c,$$
$$\ln \frac{y}{1-y} = kt + c,$$

這裏用到 y 和 $1-y$ 都是正數，所以不需要加絕對值符號。兩邊取指數，並記 $D = \mathrm{e}^c$，

$$\frac{y}{1-y} = D\mathrm{e}^{kt}.$$

於是 $y = D\mathrm{e}^{kt} - yD\mathrm{e}^{kt}$，所以 $y\left(1 + D\mathrm{e}^{kt}\right) = D\mathrm{e}^{kt}$，而

$$y = \frac{D\mathrm{e}^{kt}}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

正是所求。代入 $t = 0$ 可得 $D = \dfrac{y_0}{1-y_0} = \dfrac{y_0}{x_0}$，其中 x_0 和 y_0 是初始值；特別地，$D > 0$。

> **想一想** 我們在積分時假設了 $0 < y < 1$。怎樣知道這個條件在任何時刻都一直成立？

假設不然，並設 T 為 y 首次到達 0 或 1 的時刻。在 $0 \le t < T$ 上，以上的推導是成立的，所以 y 在該處由公式給出。由於 y 是連續（continuous）的，$y(T)$ 就是公式在 $t \to T$ 時的極限（limit），即 $D\mathrm{e}^{kT}/(1 + D\mathrm{e}^{kT})$。因為 $D > 0$，這個值嚴格介乎 0 與 1 之間，於是出現矛盾。所以對所有 t 都有 $0 < y < 1$，而公式對所有 t 都成立。

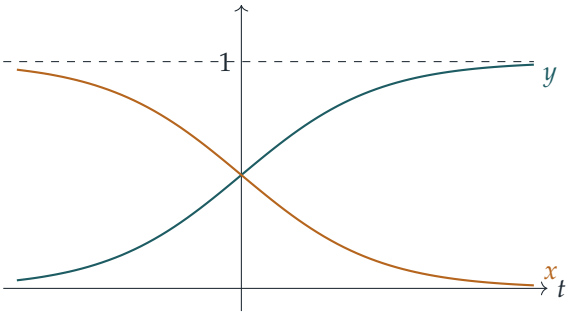
A 會否完全轉化？

不會。由公式，

$$x = 1 - y = \frac{1}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

而對每一個 t，$D\mathrm{e}^{kt}$ 都是有限的，所以在任何時刻都有 $x > 0$：A 總會剩下一些。不過，當 $t \to \infty$ 時，$D\mathrm{e}^{kt} \to \infty$（因為 $k > 0$ 且 $D > 0$），所以 $x \to 0$ 而 $y \to 1$。轉化過程愈來愈接近完成，但永遠不會在有限時間內結束。

這在物理上也說得通：反應速率 $kVxy$ 與剩餘的 A 的份量成正比，所以 A 快用完時，反應便會慢下來。



草圖（取 $D = k = 1$）顯示 y 的 S 形邏輯斯諦曲線（logistic curve）趨近 1，以及 x 的曲線趨近 0，兩者都永遠不會到達各自的極限。

驗算

- 對答案求導：設 $u = De^{kt}$，則 $y = u/(1+u)$，而 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = ku/(1+u)^2 = ky(1-y)$，與預期相符。
- 取 $D = k = 1$（即開始時兩者體積相等），公式給出在 $t = \ln 3$ 時 $y = \frac{3}{4}$。我們亦隨機選取了 200 組 k 和初始值，用數值方法把方程逐步向前推算，結果與公式相差不超過 10^{-12}，而 x 自始至終都保持正值。

常見錯誤

- 把「在極限中 $y = 1$」當成「在某個時刻 $y = 1$」。$t \to \infty$ 時的極限，在任何有限的時刻都不會達到。
- 忘記 $\ln(y/(1-y))$ 這一步需要 $0 < y < 1$，或者沒有說明這個條件為何一直成立。

STEP 之外

方程 $\dot{y} = ky(1-y)$ 就是邏輯斯諦方程（logistic equation），是描述受資源限制的增長的標準模型。這裏 $y = 0$ 和 $y = 1$ 是平衡解（equilibrium solutions），而微分方程的唯一性定理（uniqueness theorem）指出，其他解永遠不能穿越或觸及它們，這是解決最後一部分的一個更簡潔的方法。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）詳細討論了邏輯斯諦方程和這類穩定性分析（stability analysis）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。