詳細解答

STEP I 2003，第 7 題

純數學 • 數字與整除性

> **STEP I 2003，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q7

關鍵思路

設 $N = 100a + 10b + c$，並令 $S = N$，便得到一條關於三個數字的方程。把它整理成

$$99a + (10b - b^2) = c^3 - c,$$

題目第一段的兩個事實就可以直接派上用場：含 b 的一項被困在 0 與 25 之間，而 $99a$ 和 $c^3 - c$ 都是 3 的倍數。第一個事實表示 $c^3 - c$ 必定剛好略高於 99 的某個倍數；第二個事實則減少了 b 的可能取值。之後只剩下寥寥幾種情況，用手逐一檢查即可。

解答

兩個預備事實

配方（completing the square）得

$$10k - k^2 = 25 - (5 - k)^2.$$

由於 $(5 - k)^2 \geq 0$，可得 $10k - k^2 \leq 25$。由於 $0 \leq k \leq 9$，我們有 $-4 \leq 5 - k \leq 5$，所以 $(5 - k)^2 \leq 25$，因此 $10k - k^2 \geq 0$。（當 $k = 0$ 時取等號得 0，當 $k = 5$ 時取等號得 25。）

其次，$k - 1$、k、$k + 1$ 是三個連續整數（consecutive integers），所以當中恰有一個是 3 的倍數。因此它們的積 $k(k - 1)(k + 1)$ 可被 3 整除。（這對所有整數 k 都成立，不限於 $0 \leq k \leq 9$。）

找出這些數

設 $N = 100a + 10b + c$，其中各數字滿足 $1 \le a \le 9$（因為 $N \ge 100$）及 $0 \le b, c \le 9$。則 $S = a + b^2 + c^3$，而

$$\begin{aligned} S = N &\iff a + b^2 + c^3 = 100a + 10b + c \\ &\iff 99a + (10b - b^2) = c^3 - c = (c-1)c(c+1). \qquad (*) \end{aligned}$$

想一想 為甚麼要把 $10b - b^2$ 與 $99a$ 放在同一邊？

因為這正是我們剛剛學會控制的組合。設 $t = 10b - b^2$，第一個事實指出 $0 \le t \le 25$，而 $99a$ 是 99 的倍數，遠大於 25。所以 $(*)$ 表示 $c^3 - c$ 等於 99 的某個倍數加上一個細小的「餘數」t，這樣很快就能把情況鎖定。

限制 b。由第二個事實，3 整除 $c^3 - c = (c-1)c(c+1)$，而 3 亦整除 $99a$。所以由 $(*)$，3 整除 $t = b(10 - b)$。由於 $10 - b \equiv 1 - b \pmod 3$，這需要 $b \equiv 0$ 或 $b \equiv 1 \pmod 3$。可能的情況如下：

b	0	1	3	4	6	7	9
$t = 10b - b^2$	0	9	21	24	24	21	9

所以 $t \in \{0, 9, 21, 24\}$。（$b = 2, 5, 8$ 時 $t = 16, 25, 16$，全都不能被 3 整除。）

限制 c。由於 $a \ge 1$ 及 $t \ge 0$，$(*)$ 給出 $c^3 - c \ge 99$。$c^3 - c$ 的值如下：

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c^3 - c$	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720

所以 $c \ge 5$。

各種情況。對每個 $c \ge 5$，我們需要一個倍數 $99a$（其中 $1 \le a \le 9$）落在範圍 $[c^3 - c - 25,\ c^3 - c]$ 之內，然後 $t = c^3 - c - 99a$ 必須是 $0, 9, 21, 24$ 其中之一。

- $c = 5$：$c^3 - c = 120$。在 $[95, 120]$ 內 99 的倍數只有 99，得 $a = 1$ 及 $t = 21$，所以 $b = 3$ 或 $b = 7$。由此得 $N = 135$ 和 $N = 175$。
- $c = 6$：$c^3 - c = 210$。在 $[185, 210]$ 內 99 的倍數只有 198，得 $a = 2$ 及 $t = 12$。但 12 並非 $0, 9, 21, 24$ 其中之一（事實上 $10b - b^2 = 12$ 沒有整數根）。無解。
- $c = 7$：$c^3 - c = 336$。附近的倍數是 297 和 396，兩者都不在 $[311, 336]$ 內。無解。
- $c = 8$：$c^3 - c = 504$。在 $[479, 504]$ 內 99 的倍數只有 495，得 $a = 5$ 及 $t = 9$，所以 $b = 1$ 或 $b = 9$。由此得 $N = 518$ 和 $N = 598$。
- $c = 9$：$c^3 - c = 720$。附近的倍數是 693 和 792，兩者都不在 $[695, 720]$ 內。無解。

以上每一步都可以逆推，所以這四個數確實滿足 $S = N$；直接驗證：

$$135 : 1 + 3^2 + 5^3 = 1 + 9 + 125 = 135, \quad 175 : 1 + 7^2 + 5^3 = 1 + 49 + 125 = 175,$$
$$518 : 5 + 1^2 + 8^3 = 5 + 1 + 512 = 518, \quad 598 : 5 + 9^2 + 8^3 = 5 + 81 + 512 = 598.$$

所以滿足 $S = N$ 的數恰好是

$$N = 135, \quad 175, \quad 518, \quad 598.$$

驗算

對全部 900 個三位數作窮舉搜尋（brute-force search），逐一計算 $a + b^2 + c^3$，找到的恰好是 135、175、518 和 598，與分情況討論的結果一致。還有一個巧妙的結構性檢驗：每一對解之中，b 的兩個值相加都等於 10（$3 + 7$ 和 $1 + 9$）。這是必然的，因為把 b 換成 $10 - b$ 時，$t = 10b - b^2$ 保持不變。

常見錯誤

- 忘記 $a \geq 1$，因而接受了 000 或 001 這類並非三位數的「解」。
- 對給定的 a 和 c 找到一個 b 之後便停下來：由於 $t(b) = t(10 - b)$，解是成對出現的。
- 只用被 3 整除這一性質，而沒有用上界限 $0 \leq t \leq 25$：正是這個界限令每個 c 最多只有一個可能的 a。

STEP 之外

等於自身各數字的冪之和的數，是趣味數學中的經典題材（其中最著名的一類是阿姆斯特朗數（Armstrong numbers），又稱「自戀數」（narcissistic numbers），例如 $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$）。背後真正重要的想法，正是這裏所用的方法：先估計兩邊的大小，使搜尋範圍變成有限，再利用同餘（congruence）來刪減。這種把大小估計與模算術（modular arithmetic）結合起來的手法，是解決許多丟番圖方程（Diophantine equations）的關鍵。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本數論入門著作）對同餘及其應用有極佳的介紹。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。