詳細解答

STEP I 2003，第 6 題

純數學 • 以部分分式積分

> **STEP I 2003，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q6

關鍵思路

兩個二次式都可以因式分解，所以最自然的工具就是部分分式（partial fractions）。所謂「不同情況」，出現在兩個一次因式重合的那一刻：這時部分分式失效，我們改為對一個完全平方（perfect square）積分。動手做第 (ii) 部分之前，先仔細看清楚那兩個二次式：只要把變數簡單平移一下，其中一個就變成另一個。

解答

第 (i) 部分

由於 $2 \times a = 2a$ 及 $2 + a = a + 2$，這個二次式可以因式分解：

$$x^2 + (a+2)x + 2a = (x+2)(x+a).$$

因為 $a > 0$，當 $0 \le x \le 1$ 時兩個因式都是正數，所以被積函數（integrand）在整個區間上連續（continuous），而對每一個 $a > 0$，積分都存在。兩個因式相等，當且僅當 $a = 2$，這就是分界線。

情況 $a \neq 2$。兩個因式相異，且

$$\frac{1}{(x+2)(x+a)} = \frac{1}{a-2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+a}\right),$$

這可以通分來驗證：分子變成 $(x+a) - (x+2) = a - 2$。由於 $x+2$ 和 $x+a$ 在 $[0,1]$ 上

都是正數，對數（logarithm）裏不需要加絕對值符號：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+a)} &= \frac{1}{a-2}\Big[\ln(x+2)-\ln(x+a)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{a-2}\Big(\ln 3-\ln(1+a)-\ln 2+\ln a\Big)\\ &= \frac{1}{a-2}\ln\left(\frac{3a}{2(a+1)}\right).\end{aligned}$$

想一想 當 $0<a<2$ 時，因子 $\frac{1}{a-2}$ 是負數。被積函數是正的，答案必須是正數；它仍然是正數嗎？

是的。我們有 $\dfrac{3a}{2(a+1)}<1 \iff 3a<2a+2 \iff a<2$，所以當 $0<a<2$ 時，對數也是負數，兩者相除便得正數。同理，當 $a>2$ 時兩者皆為正數。如果你希望每一部分都是正數，可以把 $0<a<2$ 時的答案寫成 $\dfrac{1}{2-a}\ln\left(\dfrac{2(a+1)}{3a}\right)$；這是同一個數。

情況 $a=2$。這時被積函數是 $(x+2)^{-2}$，而

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=\left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

第 (ii) 部分

這裏的二次式是 $u^2+au+a-1=(u+1)(u+a-1)$，但在重複上面的工夫之前，先作代換（substitution）$u=x+1$：

$$(x+1)^2+a(x+1)+a-1=x^2+(a+2)x+2a.$$

這正正就是第 (i) 部分的二次式。此外 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，而 $u=1,2$ 對應 $x=0,1$。所以

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+(a+2)x+2a},$$

答案亦與第 (i) 部分相同：

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a-2}\ln\left(\dfrac{3a}{2(a+1)}\right), & a\neq 2,\\[2ex] \dfrac{1}{6}, & a=2.\end{cases}$$

直接計算：在 $[1,2]$ 上有 $u+1>0$ 及 $u+a-1\geq a>0$，所以被積函數同樣連續，而兩個因式重合，當且僅當 $a-1=1$，即 $a=2$。部分分式給出 $\frac{1}{a-2}[\ln\frac{u+1}{u+a-1}]_1^2=\frac{1}{a-2}(\ln\frac{3}{a+1}-\ln\frac{2}{a})$，這是同一個表達式。

驗算

- **在 $a = 2$ 處的連續性**。當 $a \to 2$ 時，對數趨向 $\ln 1 = 0$，所以公式呈 $0/0$ 的形式。它的極限（limit）就是 $\ln 3a - \ln(2a+2)$ 在 $a = 2$ 處的導數（derivative），即 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，與特殊情況的結果吻合。兩種情況順暢地銜接起來，本應如此。
- **一個特殊值**。取 $a = 1$，第 (i) 部分的被積函數是 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$，而公式給出 $-\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3} \approx 0.2877$。
- **數值驗證**。對兩個積分使用辛普森法則（Simpson's rule），取 $a = 1$、$a = 2$、a 接近 0 和 2 的值，以及 200 個不超過 20 的隨機 a 值，結果與公式相符，誤差小於 10^{-10}。

常見錯誤

- 忘記了 $a = 2$ 的情況，這時部分分式的係數 $\frac{1}{a-2}$ 沒有定義。
- 把部分分式的正負號弄反了。通分檢查一下。
- 把 $0 < a < 2$ 和 $a > 2$ 當成真正不同的答案。只要留意正負號，一條公式已涵蓋兩者。

STEP 之外

在 $a = 2$ 處的表現，是可去奇點（removable singularity）的一個小例子：公式在某一點看似沒有定義，但它在該點的極限恰好就是積分的值。在分析學（analysis）中，你會學到一個依賴參數的積分在甚麼條件下對該參數連續（或可微），這就解釋了為何兩種情況必須吻合。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）對極限、連續性和黎曼積分（Riemann integral）有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。