詳細解答

STEP I 2003，第 5 題

純數學 • 二項式級數

> **STEP I 2003，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q5

關鍵思路

在任何二項展開式（binomial expansion）中，先寫出通項（general term），再追蹤它所帶的 x 的冪次；常數項（constant term）就是該冪次為零的那一項。第 (ii) 部分的展開式並非有限項，所以要先抽出主導因子：當 $|x|$ 很大時，主導因子是 x^6，剩下一個以 $3/x$ 為變量的級數（series）；當 $|x|$ 很小時，主導因子是 $3x^5$，剩下一個以 $x/3$ 為變量的級數。之後只要看清楚 x 的哪些冪次可能出現，問題便迎刃而解。

解答

第 (i) 部分

$(2x + x^{-2})^6$ 的通項是

$$\binom{6}{r}(2x)^{6-r}(x^{-2})^r = \binom{6}{r}2^{6-r}x^{6-3r}, \qquad r = 0, 1, \ldots, 6.$$

這一項與 x 無關，當且僅當 $6 - 3r = 0$，即 $r = 2$，此時該項為

$$\binom{6}{2}2^4 = 15 \times 16 = 240,$$

正如題目所求。

同樣地，$(ax^3 + bx^{-2})^{5n}$ 的通項是

$$\binom{5n}{r}(ax^3)^{5n-r}(bx^{-2})^r = \binom{5n}{r}a^{5n-r}b^r\, x^{15n-5r}.$$

當 $15n = 5r$ 時，x 的冪次為零，所以 $r = 3n$（它符合 $0 \le r \le 5n$）。因此與 x 無關的項

是

$$\binom{5n}{3n} a^{2n} b^{3n} = \frac{(5n)!}{(2n)!\,(3n)!}\, a^{2n} b^{3n}.$$

第 (ii) 部分

$|x|$ **很大時**。抽出因子 x^6，得

$$f(x) = (x^6(1+3/x))^{1/2} = x^3\Big(1+\frac{3}{x}\Big)^{1/2},$$

這裏按題目的原意取 $(x^6)^{1/2} = x^3$（嚴格來說應是 $|x|^3$；見下文的說明）。當 $|x| > 3$ 時，$|3/x| < 1$，所以取 $u = 3/x$ 時，$(1+u)^{1/2}$ 的二項級數（binomial series）收斂（converge）：

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 + \cdots,$$

其中 u^3 的係數是

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{3/8}{6} = \frac{1}{16}.$$

把級數乘以 x^3，項 $\binom{1/2}{k}3^k x^{-k}$ 便變成 $\binom{1/2}{k}3^k x^{3-k}$，所以只有 $k=3$ 會給出常數：

$$f(x) = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{8}x + \frac{1}{16}\cdot 27 - \frac{405}{128x} + \cdots,$$

而與 x 無關的項是 $\frac{27}{16}$，正如題目所求。

想一想 當 $x < -3$ 時會怎樣？

平方根指的是非負的那個根，而 $(x^6)^{1/2} = |x|^3$，當 $x < 0$ 時它等於 $-x^3$。所以當 $x < -3$ 時，展開式的每一項都會變號，常數項是 $-\frac{27}{16}$。題目所述的結果 $\frac{27}{16}$ 在 $x > 3$ 時完全正確；在 $x < -3$ 時，若把 $(x^6)^{1/2}$ 理解為 x^3，這個結果才成立，而這顯然就是題目的原意。

$|x|$ **很小時**。這時括號內的主導項是 $3x^5$，所以我們改為抽出它：

$$x^6 + 3x^5 = 3x^5\Big(1+\frac{x}{3}\Big).$$

要 $f(x)$ 是實數，必須有 $x^5(x+3) \geq 0$；由於 $|x| < 3$，因子 $x+3$ 是正數，所以必須有 $x \geq 0$。（當 $-3 < x < 0$ 時，f 根本不能定義為實函數。）當 $0 < x < 3$ 時，

$$f(x) = \sqrt{3}\,x^{5/2}\Big(1+\frac{x}{3}\Big)^{1/2} = \sqrt{3}\,x^{5/2}\sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k}\frac{x^k}{3^k},$$

而由於 $|x/3| < 1$，這個級數收斂。每一項都是

$$x^{5/2+k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

的常數倍，而 $\frac{5}{2}+k$ 永遠不是整數，當然也就永遠不是 0。因此，當 $|x| < 3$ 時，$f(x)$ 按 x 的冪展開的式子中沒有與 x 無關的項。（在 $x = 0$ 這一點，$f(0) = 0$。）

驗算

- 當 x 是很大的正數時，$f(x) - \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x\right)$ 應趨近 $\frac{27}{16} = 1.6875$。取 $x = 1000$，計算機給出 1.68434，而級數的下一項 $-\frac{405}{128x} \approx -0.00316$ 正好解釋了這個差距。
- 在 0 附近，$f(x) \approx \sqrt{3}\,x^{5/2}$：取 $x = 0.01$，$f(0.01) = \sqrt{10^{-12} + 3 \times 10^{-10}} \approx 1.734 \times 10^{-5}$，與 $\sqrt{3} \times 10^{-5}$ 相當接近，而且肯定不是趨向一個非零常數。
- 對於一般公式，取 $n = 1$、$a = b = 1$，得 $\binom{5}{3} = 10$，即 $(x^3 + x^{-2})^5$ 的常數項；直接展開便可確認。

常見錯誤

- 寫通項時把冪次的次序調轉了，例如寫成 $(2x)^r(x^{-2})^{6-r}$，然後又把 r 與二項式係數（binomial coefficient）配錯。兩種標記方式都可以，只要前後一致便行。
- 弄錯 $\binom{1/2}{3}$ 的正負號：兩個負因子 $(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})$ 相乘，結果是正數。
- 在 x 很小時，以抽出 x^6 的方法展開 $(x^6 + 3x^5)^{1/2}$：這樣會得到一個以 $3/x$ 為變量的級數，而它在 $|x| < 3$ 時發散（diverge）。

STEP 之外

f 的兩個展開式在不同的區域內成立，而抽出哪一個因子，就決定了你得到的是哪一個區域。這正是把函數圍繞不同的點展開的想法，它通往複分析（complex analysis）中的洛朗級數（Laurent series）和皮瑟級數（Puiseux series，即按分數冪展開的級數，就像這裏的 $x^{5/2+k}$）。在 $x < -3$ 時引起正負號問題的平方根分支（branch），也是複分析的一個核心課題。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）以圖像方式解釋了這兩個概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。