詳細解答

STEP I 2003，第 4 題

純數學 • 三角不等式

> **STEP I 2003，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q4

關鍵思路

最容易想到的做法是把兩邊同乘 $\cos\theta$，但 $\cos\theta$ 在 $[0,2\pi)$ 上會變號，而乘以負數會令不等式（inequality）的方向逆轉。因此我們分成 $\cos\theta>0$ 和 $\cos\theta<0$ 兩種情況討論。其中一種情況其實十分簡單，因為 $1+\sin\theta$ 永不為負。另一種情況，只要把 $\sin\theta-\cos\theta$ 寫成 $R\sin(\theta-\alpha)$ 的形式，便可化為單一個正弦不等式。

解答

設 $f(\theta)=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$。以下一律假設 $0\le\theta<2\pi$ 且 $\theta\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$。

情況 1：$\cos\theta<0$，即 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$

由於 $\sin\theta\ge-1$，分子 $1+\sin\theta$ 最少為 0，而分母為負數。所以 $f(\theta)\le0<1$。

$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 內的每一個 θ 都滿足該不等式。

情況 2：$\cos\theta>0$，即 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$

乘以正數 $\cos\theta$ 不會改變不等式的方向，所以

$$f(\theta)\le1\iff1+\sin\theta\le\cos\theta\iff\sin\theta-\cos\theta\le-1.$$

現在 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，於是條件變成

$$\sin\left(\theta-\tfrac{\pi}{4}\right)\le-\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

想一想 我們需要考慮 $\phi = \theta - \frac{\pi}{4}$ 的哪些值？

我們只需考慮這個情況所容許的兩個範圍：

- 若 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$，則 $-\frac{\pi}{4} \le \phi < \frac{\pi}{4}$。在這個區間（interval）上，$\sin\phi$ 是遞增的，且 $\sin\phi \ge \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，等號只在 $\phi = -\frac{\pi}{4}$ 時成立。所以這裏唯一的解是 $\theta = 0$。（驗算：$f(0) = 1/1 = 1$，等號成立。）
- 若 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$，則 $\frac{5\pi}{4} < \phi < \frac{7\pi}{4}$。在這個開區間（open interval）上 $\sin\phi < -\frac{1}{\sqrt{2}}$，因為 $\sin\phi$ 在兩個端點都等於 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$，而在兩者之間的 $\phi = \frac{3\pi}{2}$ 處降至 -1。所以 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 內的每一個 θ 都是解。

綜合結果

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ 這個值要剔除，因為該處 $\cos\theta = 0$。綜合各個情況，不等式成立，當且僅當

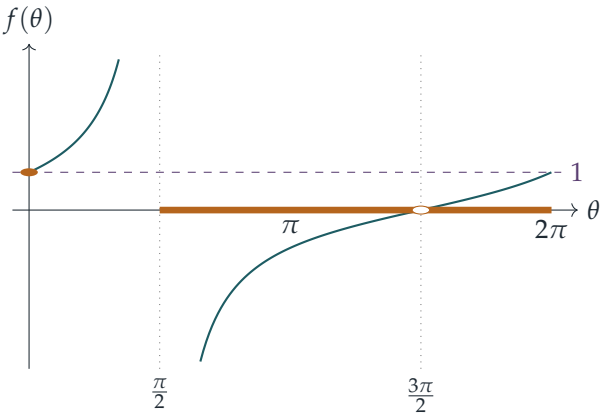
$$\theta = 0 \qquad \text{或} \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \qquad \text{或} \qquad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

更巧妙的看法

利用 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$、$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$ 和 $1 = \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}$，

$$f(\theta) = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

這裏約去了公因式，而由於 $\cos\theta \ne 0$，該公因式不等於零。（當 $\theta = \pi$ 時，中間的式子沒有定義，但首尾兩式在該處仍然相等。）當 θ 取遍 $[0, 2\pi)$ 時，$\psi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$ 取遍 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$。從 $\tan\psi$ 的圖像一看便知，$\tan\psi \le 1$ 只在 $\psi = \frac{\pi}{4}$ 以及 $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{5\pi}{4}$ 時成立。只要剔除 $\psi = \pi$（即 $\theta = \frac{3\pi}{2}$），這就是同一個答案。



解集（琥珀色）就是曲線位於虛線 $f = 1$ 上或其下方的部分。留意 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 處的空心點：在該處 $f(\theta) \to 0$，但 f 沒有定義。

驗算

- $\theta = 0$：$f(0) = 1$，剛好在邊界上。在略大於 0 之處，分子大於 1 而分母小於 1，所以 $f > 1$。這確認了 $\theta = 0$ 是一個孤立的解。
- $\theta = \frac{7\pi}{4}$：$f = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) / \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 \leq 1$。正確。
- $\theta = \pi$：$f = 1/(-1) = -1 \leq 1$。正確。
- 我們在 $[0, 2\pi)$ 內隨機抽取了 2×10^5 個 θ 作測試，結果與上述解集完全吻合。在 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 附近，我們得到 $f \approx 5 \times 10^{-5}$，與 $f \to 0$ 一致。

常見錯誤

- 沒有分情況便把整條式乘以 $\cos\theta$。這樣會在所有地方都得出 $1 + \sin\theta \leq \cos\theta$，錯誤地捨棄了整個區間 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$。
- 遺漏孤立的解 $\theta = 0$。題目容許 $\theta = 0$，而等號成立也算是解。
- 把 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 也包括在內。該處的式子是 $\frac{0}{0}$，所以沒有定義，儘管它的極限（limit）是 0。

STEP 之外

這裏的教訓是：只有遞增的運算才會保持不等式的方向，例如乘以正數、代入遞增函數（increasing function）等等。時刻留意這一點，正是實分析（real analysis）的日常功夫。$\theta = \frac{3\pi}{2}$ 處的可去奇點（removable singularity），即 f 有極限但沒有函數值的地方，是實分析的另一個主題：連續性（continuity）所講的，就是極限與函數值是否一致。Abbott 的 *Understanding Analysis* 把這兩個概念講解得既嚴謹又易讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。