詳細解答

STEP I 2003，第 3 題

純數學 • 半角三角方程

> **STEP I 2003，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q3

關鍵思路

每一部分都是把 $\frac{1}{2}\theta$ 的某個函數與 θ 的同一個函數作比較，所以可利用倍角公式（double-angle formula），把所有式子都以半角（half-angle）表示。這樣，每條方程都會變成只含單一個量（$\sin\frac{1}{2}\theta$, $\tan\frac{1}{2}\theta$ 或 $\cos\frac{1}{2}\theta$）的多項式方程（polynomial equation），可以用因式分解（factorise）或當作二次方程（quadratic）來解。唯一要小心的，是留意半角函數實際上可以取哪些值，以及各函數在哪裏有定義。

解答

第 (i) 部分

利用 $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$，方程 $2\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$ 等價（equivalent）於

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta = 0, \qquad \text{即} \qquad 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,(1-\cos\tfrac{1}{2}\theta) = 0.$$

所以方程成立，當且僅當（if and only if）$\sin\frac{1}{2}\theta = 0$ 或 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$。

但若 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$，則 $\sin^2\frac{1}{2}\theta = 1 - \cos^2\frac{1}{2}\theta = 0$，所以無論如何都有 $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$。因此第二種可能已包含在第一種之內，於是

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta = \sin\theta \iff \sin\tfrac{1}{2}\theta = 0,$$

正如所求。（換句話說，方程的解恰好是 $\theta = 2n\pi$，其中 n 為整數。）

第 (ii) 部分

設 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$。要令方程有意義，$\tan\frac{1}{2}\theta$ 和 $\tan\theta$ 都必須有定義，所以 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$ 且 $\cos\theta \neq 0$。由於 $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，第二個條件即 $t^2 \neq 1$。在這些限制之下，$\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$，方程變成

$$2t = \frac{2t}{1-t^2}.$$

兩邊乘以不等於零的 $1-t^2$，得 $2t - 2t^3 = 2t$，所以 $t^3 = 0$，即 $t = 0$。

> **想一想** 兩邊乘以 $1-t^2$ 是否穩妥？我們有沒有因此失去了解，或多出了解？

乘以一個非零的量是可逆的步驟，所以在兩個正切都有定義的集合上，這條關於 t 的方程與 $t = 0$ 完全等價。反過來，$t = 0$ 給出 $\tan\theta = 0$ 和 $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$，兩邊都等於 0。

而 $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$ 恰好在 $\frac{1}{2}\theta = n\pi$ 時成立。所以方程的解是

$$\theta = 2n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

與第 (i) 部分的解集相同。

第 (iii) 部分

設 $c = \cos\frac{1}{2}\theta$。利用 $\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1 = 2c^2 - 1$，方程 $2\cos\frac{1}{2}\theta = \cos\theta$ 等價於

$$2c = 2c^2 - 1 \iff 2c^2 - 2c - 1 = 0 \iff c = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

由於 c 是一個餘弦值，所以 $-1 \le c \le 1$。根 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \approx 1.37$ 太大，而 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \approx -0.37$ 則在容許範圍內。所以方程成立，當且僅當

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) = -\cos\phi,$$

其中 ϕ 的定義與題目所給的相同。這個 ϕ 存在而且唯一，因為 $0 < \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) < 1$，而 cos 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上由 1 遞減至 0。

> **想一想** 怎樣把 $\cos\frac{1}{2}\theta = -\cos\phi$ 化成題目所給的形式？

寫成 $-\cos\phi = \cos(\pi - \phi)$。方程 $\cos x = \cos\alpha$ 的通解 (general solution) 是 $x = 2m\pi \pm \alpha$，所以

$$\tfrac{1}{2}\theta = 2m\pi \pm (\pi - \phi) \qquad \text{即} \qquad \theta = 4m\pi \pm (2\pi - 2\phi), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

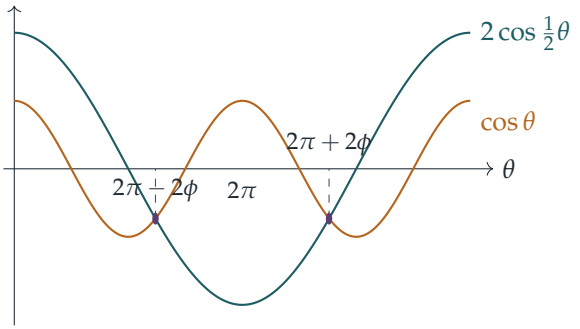
把兩個正負號分開處理。

- 取 $+$ 號：$\theta = 4m\pi + 2\pi - 2\phi = (4n+2)\pi - 2\phi$，其中 $n = m$。
- 取 $-$ 號：$\theta = 4m\pi - 2\pi + 2\phi = \big(4(m-1)+2\big)\pi + 2\phi = (4n+2)\pi + 2\phi$，其中 $n = m-1$。

當 m 取遍所有整數時，兩種情況下的 n 也取遍所有整數。因此

$$2\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\theta \iff \theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi\text{，對某個整數}n.$$

每一步都是等價關係，所以兩個方向都已證明。我們也可以直接驗證逆命題：若 $\theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi$，則 $\cos\frac{1}{2}\theta = \cos\big((2n+1)\pi \pm \phi\big) = -\cos\phi = c$，而它滿足 $2c = 2c^2 - 1$。



在 $2\cos\frac{1}{2}\theta$ 的一個週期（period）$0 \le \theta \le 4\pi$ 內，兩條曲線相交兩次，交點關於 $\theta = 2\pi$ 對稱，而 $2\cos\frac{1}{2}\theta$ 正是在該處取得最小值 -2。

驗算

- 以數值計算，$\cos\phi \approx 0.3660$ 給出 $\phi \approx 1.1961$，所以 (iii) 的第一個正數解是 $2\pi - 2\phi \approx 3.8911$。在該處 $2\cos\frac{1}{2}\theta \approx -0.7321$ 而 $\cos\theta \approx -0.7321$，符合要求。在 $[-6\pi, 6\pi]$ 上對 $2\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\theta$ 進行求根搜尋，找到的恰好是該範圍內形如 $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ 的六個值。
- 對 (ii) 作類似的搜尋（避開極點（poles）），只在 2π 的倍數處找到根。
- 對 (i) 和 (ii) 的合理性檢查：$\theta = \pi$ 不滿足 (i)，因為 $2\sin\frac{1}{2}\pi = 2 \neq 0 = \sin\pi$；它亦不在 (ii) 的定義域（domain）之內，因為 $\tan\frac{1}{2}\pi$ 沒有定義。

常見錯誤

- 在 (i) 中，約去 $\sin\frac{1}{2}\theta$ 而沒有說明它可能等於零；或把 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$ 當作另一族獨立的解，而沒有留意到它已包含在前者之內。

- 在 (ii) 中，去分母之前忘記了 θ 必須避開 $\tan\theta$ 或 $\tan\frac{1}{2}\theta$ 沒有定義的點。
- 在 (iii) 中，保留了大於 1 的根 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$；或在把 $4m\pi \pm (2\pi - 2\phi)$ 化成 $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ 的形式時，錯誤處理 $\pm$ 號。

STEP 之外

每一部分都是以半角的單一個函數作代換（substitution）來解方程，從而把三角方程化為代數方程。(ii) 中的代換 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$ 尤其強大：它把 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 都表示成 t 的有理函數（rational function），這正是大學一年級微積分用它來求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的任何有理函數的積分的原因。從幾何上看，它以有理點（rational points）把單位圓參數化（parametrise）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 一書中，有更多運用這些想法的 STEP 式練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。