詳細解答

STEP I 2003，第 2 題

純數學 • 代數恆等式

> **STEP I 2003，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q2

關鍵思路

考生的答案正確，當且僅當它滿足方程，所以把它代入（substitute）方程，再消去分母。這樣每一部分都會化為一個關於已知數的多項式（polynomial）條件。在第一部分，這個條件是一個二次型（quadratic form），對非零實數而言不可能等於零。在第二部分，它是一個三次式，可以漂亮地因式分解（factorise），而所得的因式正正就是題目問及的那三條等式。

解答

第一問

在整個解答中，a 和 b 都是非零實數。考生的答案正確，恰好就是 $x = a + b$ 滿足方程的時候。要令這句話有意義，首先需要 $a + b \neq 0$，然後需要

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

兩邊同乘以非零的 $ab(a+b)$，這等價於

$$ab = (a+b)^2, \qquad \text{即} \qquad a^2 + ab + b^2 = 0.$$

配方（completing the square）得

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \tfrac{1}{2}b\right)^2 + \tfrac{3}{4}b^2.$$

兩項都是實數的平方，所以都 ≥ 0，而且因為 $b \neq 0$，第二項嚴格大於零。因此對任意實數 a 和任意非零實數 b，都有 $a^2 + ab + b^2 > 0$，所以這個條件永遠不可能成立。

（若 $a+b=0$，考生的「答案」$x=0$ 代入方程後根本沒有意義，所以這個情況也好不到哪裏去。）因此不存在任何 a 和 b 的值使 $x=a+b$ 正確，這正是所要證明的。

第二問

現在 a、b、c 都非零。答案 $x=a+b+c$ 正確，當且僅當（if and only if）$a+b+c\neq 0$ 並且

$$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}.$$

兩邊同乘以 $abc(a+b+c)\neq 0$，這等價於

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0. \qquad (*)$$

想一想 怎樣才能看出 $(*)$ 的左邊可以因式分解？

要證明的結果提示我們，因式應該是 $a+b$、$b+c$ 和 $c+a$。先試其中一個：設 $b=-a$。這時 $a+b+c=c$，而 $ab+bc+ca=-a^2-ac+ca=-a^2$，所以左邊變成 $c(-a^2)-(-a^2c)=0$。因此 $a+b$ 是一個因式，而根據對稱性（symmetry），$b+c$ 和 $c+a$ 也是因式。左邊的次數是 3，所以它是 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 的常數倍；比較 a^2b 的係數（兩邊都是 1），可知這個常數是 1。另一個做法是把兩邊都展開：

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc &= a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+3abc-abc\\ &= a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc\\ &= (a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

所以 $(*)$ 等同於

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

現在我們證明兩個方向。

若答案正確。那麼 $a+b+c\neq 0$ 而且 $(*)$ 成立，所以 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$。若干個數的乘積為零，其中必有一個因數為零，所以 $a+b=0$、$b+c=0$、$c+a=0$ 之中至少有一條成立。

反過來，假設這三條等式中至少有一條成立；根據對稱性，不妨設 $a+b=0$。那麼 $a+b+c=c\neq 0$，所以考生的答案是一個合理的非零數，而且 $(*)$ 的因式分解形式成立。由於從方程推到 $(*)$ 的每一步都是可逆的（我們只是乘以非零的數 $abc(a+b+c)$），所以 $x=a+b+c$ 滿足方程。這一點也可以直接看出：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$，所以方程變成 $\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$，它的解是 $x=c=a+b+c$。

因此，考生的答案正確，當且僅當 $a+b=0$、$b+c=0$、$c+a=0$ 之中至少有一條成立。 ■

留意這個論證從來沒有用到 a、b、c 是實數；這個因式分解是一個代數恆等式（identity），所以結果對非零複數（complex numbers）同樣成立。相比之下，第一部分確實需要 a 和 b 是實數：在複數範圍內，$a^2+ab+b^2=0$ 是有解的，例如 $b=a\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$。

驗算

- 取 $a=2$、$b=-2$、$c=5$：這時 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$，而 $a+b+c=5$，所以考生是對的。
- 取 $a=b=c=1$：正確答案是 $x=\frac{1}{3}$，但考生的答案是 3；而事實上 $(a+b)(b+c)(c+a)=8\neq 0$。
- 在 $a=1$、$b=2$、$c=3$ 時展開 $(a+b)(b+c)(c+a)$：得 $3\cdot 5\cdot 4=60$，而 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=6\cdot 11-6=60$。
- 我們用精確的分數運算，對全部 17 576 個由非零有理數 n/d（其中 $|n|\leq 6$ 且 $d\in\{1,2,3\}$）組成的三元組，窮舉檢驗了兩個方向，沒有發現任何例外。

常見錯誤

- 寫下 $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$ 便停筆：這並不能說明它是正數。配方才可以。
- 在第二部分只證明一個方向。「當且僅當」需要證明兩個方向，而且逆命題（converse）必須檢查 $a+b+c\neq 0$。
- 忘記在兩邊同乘之前，必須先確定 $abc(a+b+c)$ 非零；正是這一點令各步可逆。

STEP 之外

表達式 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 是一個對稱多項式（symmetric polynomial），而恆等式 $(a+b)(b+c)(c+a)=e_1e_2-e_3$（其中 $e_1=a+b+c$、$e_2=ab+bc+ca$、$e_3=abc$）正是對稱多項式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）的一個例子：每個對稱多項式都可以寫成這些基本對稱多項式的多項式。除了正負號之外，這些 e_1、e_2、e_3 也就是以 a、b、c 為根的三次多項式的係數，這正是它們在方程論（theory of equations）中隨處可見的原因。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 本着這種精神討論多項式環（polynomial rings），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多辨認因式分解的 STEP 練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。