詳細解答

STEP I 2003，第 13 題

概率與統計 • 幾何分佈的期望值

> **STEP I 2003，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q13

關鍵思路

第一部分的做法，是數每隊射失的次數，而不是入球數：兩隊各射五球之後，比數相同的充要條件是兩隊射失的次數相同。至於期望值（expectation），留意突然死亡（sudden death）階段是以每回合兩球的方式進行的，而每一回合都是一次獨立試驗，以相同的概率結束這場互射十二碼。因此回合數服從幾何分佈（geometric distribution），而射球次數的期望值可以拆成「必定要射的十球」加上「額外的射球，並按需要加射的機會加權」。

解答

我們按照模型的原意，假設每一次射球都與其他各次射球獨立（independent），並且 A 隊每次射入的概率恆為 p_A，B 隊則恆為 p_B。記 $q_A = 1 - p_A$ 及 $q_B = 1 - p_B$。

射完十球後打和的概率 α

設 X 為 A 隊在首五球中射失的球數，Y 為 B 隊射失的球數。每隊的五次射球都是射失概率相同的獨立試驗，所以

$$X \sim \mathrm{B}(5, q_A), \qquad Y \sim \mathrm{B}(5, q_B),$$

而且由於兩隊的射球互相獨立，X 與 Y 亦互相獨立。

A 隊射入 $5 - X$ 球，B 隊射入 $5 - Y$ 球，所以比數相同的充要條件是 $X = Y$。對 $i =$

$0,1,\ldots,5$，事件 $\{X=Y=i\}$ 互不相交（disjoint），所以

$$\begin{aligned}\alpha = \mathrm{P}(X=Y) &= \sum_{i=0}^{5} \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=i)\\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} q_A^i p_A^{5-i} \binom{5}{i} q_B^i p_B^{5-i}\\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}^2 (1-p_A)^i (1-p_B)^i\, p_A^{5-i} p_B^{5-i},\end{aligned}$$

這就是所求的表達式。（若改為數入球數，即兩隊各入 $5-i$ 球，會得到相同的和，因為 $\binom{5}{i} = \binom{5}{5-i}$。）

射球次數的期望值

如果射完十球後比數仍然相同，突然死亡階段便以回合進行：每一回合中 A 隊射一球，B 隊射一球。若兩球之中恰好只有一球射入，該回合便分出勝負，而這個情況出現的概率是

$$p_A q_B + q_A p_B = p_A(1-p_B) + p_B(1-p_A) = p_A + p_B - 2p_A p_B = \beta.$$

否則（兩隊都射入或都射失）便要再進行一個回合。我們需要 $\beta > 0$，也就是說，我們排除 $p_A = p_B = 0$ 和 $p_A = p_B = 1$ 這兩個平凡情況，因為在這兩個情況下，任何回合都永遠無法分出勝負。

> ? **想一想** 為甚麼互射十二碼不可以在一個回合的中途結束？

規則訂明，當一隊射入而另一隊未能射入時，兩隊的射球次數必須相同。即使 A 隊射失，B 隊仍然要射自己的一球（B 隊也可能射失）。所以突然死亡階段的射球總是成對出現，射球總數是 $10+2R$，其中 R 是所進行的回合數（若比賽在首十球內已分出勝負，則 $R=0$）。

在已知進入突然死亡階段的條件下，各回合是獨立試驗，每個回合分出勝負的概率都是 β，所以 R 服從幾何分佈：

$$\mathrm{P}(R=k \mid \text{十球後打和}) = (1-\beta)^{k-1}\beta, \qquad k=1,2,3,\ldots$$

它的平均值是

$$\mathrm{E}(R \mid \text{十球後打和}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta(1-\beta)^{k-1} = \beta \cdot \frac{1}{(1-(1-\beta))^2} = \frac{1}{\beta},$$

這裏用到當 $|x|<1$ 時 $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = (1-x)^{-2}$，而由於 $0<\beta\leq 1$，這條公式適用。

如果比賽在首十球內已分出勝負，則 $R=0$。按射完十球後比數是否相同來取條件，

$$\mathrm{E}(R) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + (1-\alpha)\cdot 0 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

因此射球次數的期望值是

$$\mathrm{E}(10+2R) = 10 + \frac{2\alpha}{\beta},$$

正如所求。

驗算

- 兩隊實力相同，$p_A = p_B = \frac{1}{2}$：由范德蒙恆等式（Vandermonde's identity）$\sum_i \binom{5}{i}^2 = \binom{10}{5} = 252$，所以 $\alpha = 252/2^{10} = \frac{63}{256}$，而 $\beta = \frac{1}{2}$。射球次數的期望值是 $10 + \frac{63}{64} = \frac{703}{64} \approx 10.98$。
- 如果一隊百發百中而另一隊一球不入（$p_A = 1$，$p_B = 0$），則 $\alpha = 0$（只有 $i = 0$ 的一項有可能不為零，但它含有 $p_B^5 = 0$），所以恰好射 10 球，與常理相符。
- 我們把 α 的公式與直接列舉首十球全部 2^{10} 個結果所得的答案作了比對，又把 $10 + 2\alpha/\beta$ 與模擬 2×10^5 場互射十二碼的結果作了比對；當 $p_A = \frac{3}{4}$、$p_B = \frac{2}{3}$ 時，公式給出 11.264，模擬則給出 11.25。

常見錯誤

- 把 β 當成 A 隊贏得一個回合的概率 $p_A(1 - p_B)$：其實任何一隊贏得一個回合，互射十二碼都會結束。
- 把答案寫成 $10 + 2/\beta$，忘記了突然死亡階段只以概率 α 出現。
- 把突然死亡階段的每一步算作一球，而不是兩球。

STEP 之外

$\mathrm{E}(R) = \alpha\,\mathrm{E}(R \mid \text{打和}) + (1-\alpha)\,\mathrm{E}(R \mid \text{未打和})$ 這一步就是全期望定律（law of total expectation），它是大學一年級概率論中最有用的工具之一。突然死亡階段也是一條帶有吸收態（absorbing state）的簡單馬可夫鏈（Markov chain），而這裏「到達吸收的期望時間」的計算，可以推廣到隨機漫步（random walk）和賭徒破產（gambler's ruin）問題。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對條件期望（conditional expectation）和這類馬可夫鏈都有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。