詳細解答

STEP I 2003，第 11 題

力學 • 斜面上的碰撞

> **STEP I 2003，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q11

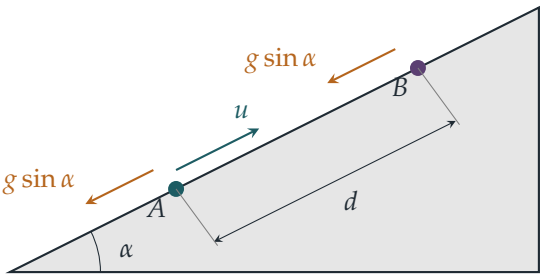
關鍵思路

在光滑（smooth）斜面上，無論速度如何，每個質點的加速度都相同，都是沿最大斜率線（line of greatest slope）向下的 $g\sin\alpha$。因此重力無法改變兩個質點之間的相對運動：從其中一個質點看，另一個質點以恆定速度運動。這樣一來，碰撞時間便很容易求出，而且不必經過繁瑣的運動學計算，就能知道碰撞一刻的相對速度（relative velocity）。碰撞中的能量損失只取決於這個相對速度，這正是 α、g 和 d 全都從答案中消失的原因。

解答

模型

我們把兩個質點都視為點質量，沿着通過 A 和 B 的最大斜率線運動。斜面是光滑的，所以每個質點所受的力只有重量和法向反作用力（normal reaction）。沿垂直於斜面的方向分解，反作用力與 $mg\cos\alpha$ 平衡。沿斜面方向分解，每個質點的加速度都是沿斜面向下的 $g\sin\alpha$。取 x 為由 A 起沿斜面向上的距離。



碰撞時間

設 $a = g\sin\alpha$。以沿斜面向上為正方向，從 A 出發的質點（稱為 P）和從 B 出發的質點（稱為 Q）的位置分別為

$$x_P = ut - \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$x_Q = d - \tfrac{1}{2}at^2.$$

兩者之間的距離為

$$x_Q - x_P = d - ut,$$

因為 $\frac{1}{2}at^2$ 項互相抵消。這段距離由 d 開始均勻地縮短，並且恰好在

$$t = \frac{d}{u},$$

時變為零，這正是我們要證明的結果。這次抵消正是關鍵思路的體現：兩個質點以同樣的方式沿斜面下落，所以只有初始相對速率 u 才有影響。

動能損失

在 $t = d/u$ 時，兩個質點沿斜面向上的速度為

$$v_P = u - \frac{ad}{u}, \qquad v_Q = -\frac{ad}{u}.$$

為簡便起見，記 $w = ad/u$。於是 $v_P = u - w$ 及 $v_Q = -w$，而 P 以相對速率 $v_P - v_Q = u$ 接近 Q。

> **想一想** 重力正在作用，為甚麼我們仍可使用動量守恆（conservation of momentum）？

碰撞是瞬時發生的。在極短的碰撞時間內，重力和法向反作用力這些有限的力所產生的衝量（impulse），與質點之間的巨大衝量相比可以忽略不計。因此在碰撞中，沿斜面方向的動量守恆。

設碰撞後沿斜面向上的速度為 v'_P 和 v'_Q。由於兩個質點的質量相等，動量守恆給出

$$v'_P + v'_Q = v_P + v_Q = u - 2w. \tag{1}$$

牛頓實驗定律（Newton's experimental law）指出，分離速率等於接近速率的 e 倍：

$$v'_Q - v'_P = e(v_P - v_Q) = eu. \tag{2}$$

我們不分別解出 v'_P 和 v'_Q，而是利用恆等式

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}[(p+q)^2 + (p-q)^2].$$

把它分別應用於碰撞前和碰撞後，總動能（kinetic energy，簡稱 KE）為

$$\text{碰撞前動能} = \tfrac{1}{2}m(v_P^2 + v_Q^2) = \tfrac{1}{4}m[(u-2w)^2 + u^2],$$
$$\text{碰撞後動能} = \tfrac{1}{2}m(v_P'^2 + v_Q'^2) = \tfrac{1}{4}m[(u-2w)^2 + e^2u^2],$$

其中碰撞後的和與差分別用了 (1) 和 (2)。兩式中「和」的一項相同，所以

$$\text{動能損失} = \tfrac{1}{4}mu^2 - \tfrac{1}{4}me^2u^2 = \tfrac{1}{4}mu^2(1-e^2),$$

正如所求。

想一想 $(u-2w)^2$ 這一項在物理上代表甚麼？為甚麼它不會改變？

$v_P + v_Q$ 的一半就是質心（centre of mass）的速度。$\frac{1}{4}m(u-2w)^2$ 這一項是總質量 $2m$ 以該速度運動時的動能，而動量守恆令它保持不變。只有相對於質心的運動的動能才可能損失，而這部分動能只取決於相對速率：碰撞前是 u，碰撞後是 eu。

驗算

- 若 $e = 1$（完全彈性，perfectly elastic），損失為零，理應如此。若 $e = 0$，兩個質點在碰撞後一起運動，損失為 $\frac{1}{4}mu^2$，即相對運動的全部動能。
- 若 $\alpha = 0$，斜面變成水平面，Q 保持靜止，而 P 經過時間 d/u 後以速率 u 到達它那裏，與結果吻合。
- 數值上，取 $\alpha = 30°$、$g = 9.8$、$d = 2$、$u = 4$、$e = \frac{1}{2}$ 及 $m = 1$：在 $t = 0.5$ 時，兩個速度為 1.55 和 -2.45。碰撞後它們變為 -1.45 和 0.55，動能由 4.2025 降至 1.2025，損失為 3，等於 $\frac{1}{4}\cdot 16\cdot\frac{3}{4}$。另外以數值方法逐步模擬運動，隨機測試了 1000 個情況，結果同樣吻合。

常見錯誤

- 把 Q 在碰撞一刻的速度當作零。它已經沿斜面下滑了 d/u 這麼長的時間，正如 P 在這段時間內一直在減速。
- 在牛頓定律中弄錯正負號。應把兩個速度都按同一個正方向寫出，然後用分離速率 $= e \times$ 接近速率。
- 完整解出 v_P' 和 v_Q'，然後展開四個平方。這樣做是可行的，但利用和與差的恆等式可以省去幾乎所有代數運算。

STEP 之外

兩個部分都是轉換到質心參考系（centre-of-mass frame）的例子。均勻重力場令每個質點都有相同的加速度，所以它在相對運動中完全消失。此外，任何系統的動能都可以分拆為質心的動能，加上相對於質心的動能（柯尼希定理，König's theorem）。在二體問題中，第二部分是 $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$，其中折合質量（reduced mass）為 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$，在這裏是 $\frac{1}{2}m$。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對這兩個想法都有仔細的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。