詳細解答

STEP I 2003，第 10 題

力學 • 薄片的質心

> **STEP I 2003，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q10

關鍵思路

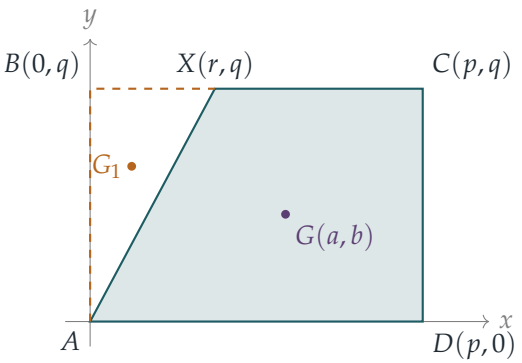
處理切去了一塊的圖形，最好的方法是相減：長方形對每條軸的矩（moment）等於梯形（trapezium）的矩加上三角形的矩，而各部分的質量與面積成正比。至於懸掛的部分，一塊薄片（lamina）從某一點自由懸掛，靜止時其重心（centre of gravity）必在該點的正下方，所以直線 AG 是鉛垂的。這樣，45° 這個條件就化為 a 與 b 之間一個非常簡單的關係。

解答

我們把薄片當作均勻而且很薄，因此任何一部分的質量都與其面積成正比，而三角形的重心位於其形心（centroid），即三個頂點的平均位置。

重心

按題目所給的坐標軸，$A=(0,0)$，$D=(p,0)$，$C=(p,q)$，因此 $B=(0,q)$。由於 X 在 BC 上，且 $BX=r$，所以 $X=(r,q)$，其中 $0\le r\le p$。



三個部分如下。

- 長方形 $ABCD$：面積為 pq，重心為 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$。
- 三角形 ABX（被切去的部分）：面積為 $\frac{1}{2}qr$，重心 G_1 是 $(0,0)$、$(0,q)$ 和 (r,q) 的平均位置，即 $(\frac{r}{3}, \frac{2q}{3})$。
- 餘下的梯形 $AXCD$：面積為 $pq - \frac{1}{2}qr = \frac{1}{2}q(2p-r)$，重心為 $G = (a,b)$。

長方形對每條軸的矩，等於它兩個部分的矩之和。對 y-軸取矩（即比較 x-坐標），

$$pq \cdot \frac{p}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{r}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, a.$$

兩邊除以 $\frac{q}{2}$，得 $p^2 = \frac{r^2}{3} + (2p-r)a$；由於 $2p - r \geq p > 0$，我們可以除以它：

$$a = \frac{3p^2 - r^2}{3(2p-r)}.$$

同樣地，對 x-軸取矩，

$$pq \cdot \frac{q}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{2q}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, b,$$

所以 $pq = \frac{2qr}{3} + (2p-r)b$，而

$$b = \frac{q(3p-2r)}{3(2p-r)}.$$

快速驗算一下：$r = 0$（即沒有切去任何部分）時，$a = \frac{p}{2}$，$b = \frac{q}{2}$，正是長方形的中心。

從 A 懸掛

當薄片從 A 自由懸掛並處於平衡（equilibrium）時，只有兩個力作用在它上面：通過 G 的重量，以及在 A 的反作用力。兩個力若互相平衡，必定沿同一直線作用，所以 G 在 A 的正下方。

想一想 「AD 在水平線以下 45°」怎樣變成一條關於 a 和 b 的方程？

由於 AG 是鉛垂的，而 AD 與水平線成 45°，所以 AD 與 AG 亦成 45°；即是說，角 GAD 是 45°。在我們的坐標軸中，AD 是正 x-軸，而 $G = (a, b)$，其中 $a, b > 0$（它位於梯形之內），所以 $\tan\angle GAD = b/a$。因此 $b/a = 1$，即

$$a = b.$$

代入上面的表達式，並約去共同的正分母 $3(2p - r)$，

$$\begin{aligned} & 3p^2 - r^2 = q(3p - 2r) \\ \iff \quad & r^2 - 2qr + 3pq - 3p^2 = 0. \end{aligned}$$

由二次公式（quadratic formula），

$$r = q \pm \sqrt{q^2 - (3pq - 3p^2)} = q \pm \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2}.$$

根號內的量是 $(q - \frac{3}{2}p)^2 + \frac{3}{4}p^2 > 0$，所以兩個根都是實數，而且互不相同。記 $s = \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2} > 0$。

選擇正負號。 由於 X 在邊 BC 上，而這條邊的長度是 p，我們需要 $0 \le r \le p$。現在證明根 $q + s$ 總是大於 p。

- 若 $q \ge p$，則 $q + s > q \ge p$，因為 $s > 0$。
- 若 $q < p$，則 $p - q > 0$，而且

  $$s^2 - (p - q)^2 = (q^2 - 3pq + 3p^2) - (p^2 - 2pq + q^2) = 2p^2 - pq = p(2p - q) > 0,$$

  因為 $q < p < 2p$。所以 $s > p - q$，從而 $q + s > p$。

無論哪種情況，取正號都會令 X 越過 C，落在薄片之外，所以不可能。因此

$$r = q - \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2},$$

這正是所要證明的結果。

為完整起見補充一點：這個根確實位於 $[0, p]$ 之內，當且僅當 $p \le q \le 2p$。事實上，$q - s \ge 0 \iff q^2 \ge s^2 \iff 3p(q - p) \ge 0 \iff q \ge p$，而且（當 $q > p$ 時）$q - s \le p \iff (q - p)^2 \le s^2 \iff p(2p - q) \ge 0 \iff q \le 2p$。所以題目描述的情況只會在這類形狀中出現，這與直覺吻合：未經切割的正方形（$q = p$，$r = 0$）從一角懸掛時，對角線是鉛垂的；而在另一個極端（$q = 2p$，$r = p$），圖形就是直角三角形 ACD，其形心 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$ 同樣滿足 $a = b$。

驗算

- 取 $r = 0$ 便得回長方形的中心 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$，而 $r = p$ 則給出 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$，即三角形 ACD 的形心。
- 取 $p = 1$，$q = 1.5$，公式給出 $r = 1.5 - \sqrt{0.75} \approx 0.634$，於是 $a = b \approx 0.634$，所以 AG 確實與 AD 成 45°。另一個根 ≈ 2.37，超過了 $p = 1$。
- 我們亦以一般的多邊形形心公式，用數千組隨機的 p, q, r 核對過重心公式。

常見錯誤

- 把三角形的形心寫成 $(\frac{r}{3}, \frac{q}{3})$：它有兩個頂點位於高度 q，所以形心的高度是 $\frac{2q}{3}$。
- 把三角形的矩加上去而不是減去：梯形是長方形減去三角形。
- 以一句含糊的「r 一定很小」來捨去正號。真正的理由是 $r \le p$，而這需要一段簡短的論證，按 $q \ge p$ 與否分開兩種情況處理。

STEP 之外

用相減法求質心（centre of mass），其實是計算 $\iint x \, \mathrm{d}A \big/ \iint \mathrm{d}A$ 的離散版本；到了大學，你會在二重積分（double integral）中再遇上同一個想法，用來處理密度不均勻的薄片以及立體。懸掛條件則是一個普遍原理的最簡單情況：一個以某一點為支點的剛體（rigid body），當其質心位於支點正下方時處於穩定平衡，此時它的勢能（potential energy）最小。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對質心和剛體平衡有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。