詳細解答

STEP I 2003，第 1 題

純數學 • 冪和

> **STEP I 2003，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q1

關鍵思路

題目已經告訴我們答案的形式：一個以 n 為變數、係數未知的多項式（polynomial），所以餘下的工作只是把這些係數確定下來。一個對所有 n 都成立的多項式恆等式（identity），對幾個方便計算的 n 值當然也成立，而每個值都給出一條線性方程（linear equation）。讓求和由負數下標開始是刻意安排的技巧：這樣我們便可以使用 $n = -1$ 和 $n = -2$ 等較小的值，令方程組呈現悅目的對稱性。

解答

題目中 r 既用作求和變數，又用作係數。為免混淆，我們把求和變數寫成 k，而 p, q, r, s 和 a, b, c, d, e 則保留作係數。

平方和

設 $S(n) = \sum_{k=-1}^{n} k^2$，於是

$$S(n) = pn^3 + qn^2 + rn + s.$$

由 $k = -1$ 開始的和對所有 $n \geq -1$ 都有意義，而且

$$S(-1) = 1, \qquad S(0) = 1 + 0 = 1, \qquad S(1) = 1 + 0 + 1 = 2, \qquad S(2) = 1 + 0 + 1 + 4 = 6.$$

把 $n=-1,0,1,2$ 代入題目給出的形式，得到四條方程

$$-p+q-r+s=1, \tag{1}$$
$$s=1, \tag{2}$$
$$p+q+r+s=2, \tag{3}$$
$$8p+4q+2r+s=6. \tag{4}$$

由 (2) 得 $s=1$，所以 (1) 和 (3) 變成 $-p+q-r=0$ 和 $p+q+r=1$。兩式相加得 $2q=1$，所以 $q=\frac{1}{2}$，從而 $p+r=\frac{1}{2}$。方程 (4) 變成

$$8p+2+2r+1=6 \quad\Longrightarrow\quad 8p+2r=3 \quad\Longrightarrow\quad 6p+2(p+r)=3,$$

所以 $6p=2$，得 $p=\frac{1}{3}$ 和 $r=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$。因此

$$\sum_{k=-1}^{n} k^2=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n+1.$$

想一想 題目要求的是由 $k=0$ 開始的和，但我們求得的是由 $k=-1$ 開始的和。兩者有何分別？

兩者只相差 $k=-1$ 那一項，即 $(-1)^2=1$。所以

$$\sum_{k=0}^{n} k^2=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n=\tfrac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

這正是所要證明的結果。

立方和

現在設 $T(n)=\sum_{k=-2}^{n}k^3=an^4+bn^3+cn^2+dn+e$。這裏有五個未知數，所以我們取 $n=-2,-1,0,1,2$ 這五個值：

$$T(-2)=-8,\quad T(-1)=-9,\quad T(0)=-9,\quad T(1)=-8,\quad T(2)=0.$$

由此得到

$$16a-8b+4c-2d+e=-8, \tag{5}$$
$$a-b+c-d+e=-9, \tag{6}$$
$$e=-9, \tag{7}$$
$$a+b+c+d+e=-8, \tag{8}$$
$$16a+8b+4c+2d+e=0. \tag{9}$$

由 (7) 得 $e = -9$。這些方程按 $\pm n$ 成對出現，所以把每一對相加和相減最為划算：偶次冪和奇次冪便會分開。

利用 $e = -9$，(6) 和 (8) 變成 $a - b + c - d = 0$ 和 $a + b + c + d = 1$。相加和相減，得

$$a + c = \tfrac{1}{2}, \qquad b + d = \tfrac{1}{2}.$$

同樣地，(5) 和 (9) 變成 $16a - 8b + 4c - 2d = 1$ 和 $16a + 8b + 4c + 2d = 9$。相加和相減，得

$$32a + 8c = 10, \qquad 16b + 4d = 8,$$

即 $16a + 4c = 5$ 和 $4b + d = 2$。代入 $c = \frac{1}{2} - a$ 得 $12a + 2 = 5$，所以 $a = \frac{1}{4}$ 和 $c = \frac{1}{4}$。代入 $d = \frac{1}{2} - b$ 得 $3b + \frac{1}{2} = 2$，所以 $b = \frac{1}{2}$ 和 $d = 0$。因此

$$\sum_{k=-2}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 - 9.$$

與由 $k = 0$ 開始的和相比，由 $k = -2$ 開始的和多了 $(-2)^3 + (-1)^3 = -9$ 這些項，所以我們加上 9：

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 = \tfrac{1}{4}n^2\left(n^2 + 2n + 1\right) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

這正是所要證明的結果。

驗算

當 $n = 10$ 時，兩條公式給出 $\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 = 385$ 和 $\frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 121 = 3025$，而直接把 $0^2 + 1^2 + \cdots + 10^2$ 和 $0^3 + 1^3 + \cdots + 10^3$ 加起來，也得到相同的數字。還可留意 $3025 = 55^2 = (0 + 1 + \cdots + 10)^2$：首 n 個立方數之和，等於首 n 個整數之和的平方。我們亦用電腦核對過，兩條公式對由 0 至 59 的每個 n 都準確成立。

常見錯誤

- 由我們算出的和轉到題目要求的和時，忘記了 $k = -1$（或 $k = -2$ 和 $k = -1$）的項。注意 $(-2)^3 + (-1)^3 = -9$，而不是 $+9$。
- 處理立方和時只打算用四個 n 值：五個未知數需要五條方程。
- 把係數 r 與題目中的求和變數 r 混淆；把其中一個改名便可避免出錯。

STEP 之外

為甚麼我們可以假設答案是一個次數高一次的多項式？因為一個 $m+1$ 次多項式的差分 $P(n)-P(n-1)$ 是 m 次的，所以總可以解出一個差分為 n^m 的多項式；這就是*有限差分演算*（calculus of finite differences）的起點，而一般情況下出現的係數由伯努利數（Bernoulli numbers）決定，即福爾哈伯公式（Faulhaber's formula）。這裏所用的方法，即憑多項式在若干點上的值把它確定下來，稱為*多項式插值*(polynomial interpolation)，它在數值分析（numerical analysis）中會以拉格朗日插值（Lagrange interpolation）的形式再度出現。想做更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。