詳細解答

STEP III 2002，第 9 題

力學 • 質心與傾倒

> **STEP III 2002，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q9

關鍵思路

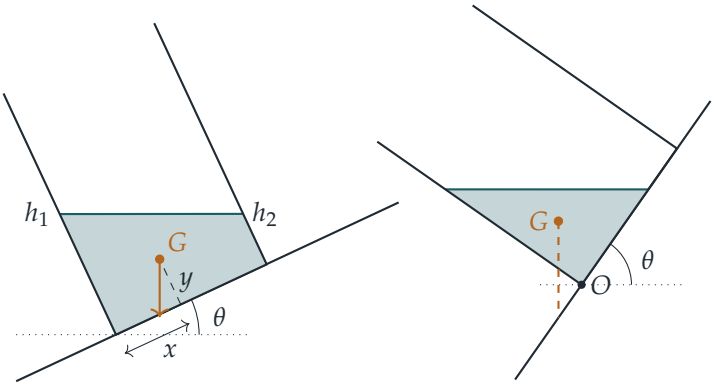
流體的自由表面（free surface）是水平的，所以在容器的參考系（容器傾斜了 θ 角）中，它是一條與底面成 θ 角的斜直線。因此，若液面與兩邊側壁都相交，流體的橫截面就是梯形（trapezium）；若液面未到達上方側壁便先碰到底面，橫截面就是直角三角形。這樣，求質心（centre of mass）便成為一個二維的形心（centroid）計算。至於傾倒（toppling），由於容器是輕的，一切取決於通過流體質心的鉛垂線與斜面相交於何處。

解答

建立模型

我們把容器看成一個輕的稜柱體，器壁厚度可忽略；把流體看成相對於容器靜止的均勻連續體；並假設斜面足夠粗糙，容器不會滑動。垂直於底面水平邊的每一個鉛垂橫截面都相同，而流體是均勻的，所以流體的質心就是其中一個橫截面的形心。該橫截面的寬度為 a，面積為 $ka^3/a = ka^2$。

沿底面由下方側壁起（沿斜面向上）量度 X，並垂直於底面量度 Y。隨着 X 增加，底面以 θ 角相對於水平面上升，所以水平的液面相對於底面以 θ 角下降：X 每增加一個單位，液面離底面的高度便減少 $\tan\theta$。記 $d = a\tan\theta$ 為整個寬度上的總下降量。



左圖顯示 $k > \frac{1}{2}\tan\theta$ 的情況（流體接觸兩邊側壁）；右圖顯示 $k < \frac{1}{2}\tan\theta$ 且 $\theta > 45°$ 的情況，此時通過 G 的鉛垂線落在底面之外。

$k > \frac{1}{2}\tan\theta$ 的情況

設下方側壁和上方側壁處的深度分別為 h_1 和 h_2。那麼 $h_1 - h_2 = d$，而梯形的面積為 $\frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ka^2$，所以 $h_1 + h_2 = 2ka$。因此

$$h_2 = ka - \tfrac{1}{2}d = a(k - \tfrac{1}{2}\tan\theta),$$

它為正數當且僅當 $k > \frac{1}{2}\tan\theta$。所以這正是液面與兩邊側壁都相交的情況。

把梯形分割成一個 $a \times h_2$ 的長方形，以及疊在其上的一個直角三角形，其兩條直角邊分別為 a（沿 $Y = h_2$）和 d（沿下方側壁向上）。

- 長方形：面積 ah_2，形心 $\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}h_2\right)$。
- 三角形：頂點為 $(0, h_2)$、(a, h_2)、$(0, h_2 + d)$，所以面積為 $\frac{1}{2}ad$，形心（各頂點的平均）為 $\left(\frac{1}{3}a,\ h_2 + \frac{1}{3}d\right)$。

對下方側壁取矩（taking moments），總面積為 ka^2，

$$ka^2\,x = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}ad \cdot \tfrac{1}{3}a \quad\Longrightarrow\quad kx = \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{12}d.$$

除以 ka 並利用 $d = a\tan\theta$，

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} - \frac{\tan\theta}{12k}.$$

對底面取矩，

$$ka^2\,y = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{2}ad\left(h_2 + \tfrac{1}{3}d\right),$$
$$ka\,y = \tfrac{1}{2}h_2^2 + \tfrac{1}{2}dh_2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}h_2(h_2 + d) + \tfrac{1}{6}d^2.$$

現在 $h_2 = ka - \frac{1}{2}d$ 而 $h_2 + d = ka + \frac{1}{2}d$，所以 $h_2(h_2 + d) = k^2a^2 - \frac{1}{4}d^2$，於是

$$ka\,y = \tfrac{1}{2}k^2a^2 - \tfrac{1}{8}d^2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}k^2a^2 + \tfrac{1}{24}d^2.$$

除以 ka^2，

$$\frac{y}{a} = \frac{k}{2} + \frac{\tan^2\theta}{24k},$$

正如所求。

$k < \frac{1}{2}\tan\theta$ 的情況

這時 h_2 會是負數，所以液面在距離下方側壁 $b < a$ 的某處與底面相交，而流體的橫截面是一個直角三角形，其兩條直角邊分別為沿底面的 b 和沿下方側壁向上的 h。由液面的斜率得 $h = b\tan\theta$，由面積得 $\frac{1}{2}bh = ka^2$。所以 $b^2\tan\theta = 2ka^2$，於是

$$b = a\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}, \qquad h = a\sqrt{2k\tan\theta}.$$

（事實上，$b < a$ 正是因為 $2k < \tan\theta$；容器很高，所以 h 不會造成問題。）三角形的形心位於每條直角邊的三分之一處，所以

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\cot\theta}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\tan\theta}.$$

當 $k = \frac{1}{2}\tan\theta$ 時，兩組公式都給出 $x/a = \frac{1}{3}$ 和 $y/a = \frac{1}{3}\tan\theta$，所以兩種情況互相銜接。

傾倒

想一想 容器在放手的一刻會否翻倒，取決於甚麼？

容器是輕的，所以唯一的重量就是流體的重量，它鉛垂地作用於流體的質心 G。斜面只能對底面施力，所以法向反作用力（normal reaction）作用於底面上某處，即下方邊緣 O 與上方邊緣之間。假如通過 G 的鉛垂線與斜面相交於 O 的下坡一側，重量對 O 便有一個力矩（moment），而這樣的反作用力無法把它平衡，於是容器繞 O 轉動：它會傾倒。

取 O 為原點，x 沿斜面向上，y 垂直於斜面。在這組坐標軸中，鉛垂向下的方向的分量為 $(-\sin\theta, -\cos\theta)$，所以由 $G = (x, y)$ 沿鉛垂線向下走一段距離 $y\sec\theta$，便到達斜面上的

$$x - y\tan\theta.$$

所以若 $x < y\tan\theta$，容器便會傾倒。

假設 $k < \frac{1}{2}$ 且 $\theta > 45°$。那麼 $\tan\theta > 1 > 2k$，所以 $k < \frac{1}{2}\tan\theta$，我們處於三角形的情況。此時

$$y\tan\theta - x = \frac{a}{3}\left(\sqrt{2k\tan\theta}\,\tan\theta - \sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\left(\tan^2\theta - 1\right) > 0,$$

因為 $\tan\theta > 1$。因此 $x < y\tan\theta$：通過 G 的鉛垂線落在下方邊緣之下，無論 $k < \frac{1}{2}$ 取甚麼值，容器都會傾倒。（在三角形的情況中，同樣的計算顯示若 $\theta < 45°$ 則容器是穩定的，所以 $45°$ 正是該情況下的臨界值。）這就是所要的結果。條件 $k < \frac{1}{2}$ 的作用，是保證當 $\theta > 45°$ 時必定處於三角形的情況。

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時，第一種情況給出 $x = \frac{1}{2}a$ 和 $y = \frac{1}{2}ka$，即一塊深度為 ka 的流體的中心。
- 兩種情況在 $k = \frac{1}{2}\tan\theta$ 時吻合，此時梯形退化成三角形。
- 數值驗算：對 300 組隨機的 (k,θ) 直接對流體區域進行積分，結果與兩組公式的誤差都在 1.4×10^{-6} 之內（取 $a = 1$）。例如，$\theta = 55°$、$k = 0.3$ 給出 $x \approx 0.216a$、$y \approx 0.309a$，而 $y\tan\theta \approx 0.441a > x$，所以容器會傾倒。

常見錯誤

- 把液面畫成與底面平行，或者斜向錯誤的一邊：流體是堆向下方側壁的。
- 忘記容器是輕的，而為容器另加一個重量：整體的質心就是流體的質心。
- 把通過 G 的鉛垂線與底面的中心比較，而不是與下方邊緣 O 比較。

STEP 之外

「通過質心的鉛垂線是否與底面相交？」這個判別法，是穩定性分析（stability analysis）中最簡單的情形。浮在水面的船隻也是用同樣的方法處理，不過在那裏浮力（buoyancy）作用於被排開的水的質心，而這個點會隨船身傾側而移動；由此便引出定傾中心（meta-centre）的概念。流動中的流體（放手後的晃盪）則是流體動力學（fluid dynamics）中困難得多的問題。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對剛體平衡（rigid-body equilibrium）及繞軸轉動有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。