詳細解答

STEP III 2002，第 8 題

純數學 • 托勒密定理

> **STEP III 2002，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q8

關鍵思路

單位圓上兩點之差，只要抽出「平均」角，便可漂亮地因式分解：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2}\right)$，而括號內正是 $2\mathrm{i}$ 乘以一個正弦。這樣一來，每條弦（chord）的模（modulus）和輻角（argument）便同時求得。至於最後一部分，兩個輻角相同的複數指向同一方向，所以它們的模直接相加；餘下只需一條把三個乘積連繫起來的代數恆等式。

解答

$u_1 - u_2$ 的輻角

設 $u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$。抽出因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$，

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)/2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2} \cdot 2\mathrm{i}\sin\tfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_2) \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\cdot(-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2} \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2-\pi)/2}, \end{aligned}$$

最後一行用了 $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$。

> ? **想一想** 為甚麼可以從這條式子直接讀出輻角？又為甚麼正弦要寫成 $\sin\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)$ 而不是 $\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)$？

形如 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 的數，只有在 $r>0$ 時，其輻角才是 ϕ（可相差 2π 的倍數）。這裏 $0<\theta_2-\theta_1<2\pi$，所以 $0<\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)<\pi$，正弦嚴格為正。若反過來寫，正弦便是負數，輻角就會

相差 π。

因此 $|u_1-u_2| = 2\sin\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)$，而 $\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2-\pi)$ 是 u_1-u_2 的一個輻角。取 arg 為 $(-\pi,\pi]$ 內的主值（principal value）：由於 $-\pi<\theta_1<\theta_2<\pi$，

$$-\tfrac{3\pi}{2} < \tfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2-\pi) < \tfrac{\pi}{2}.$$

若此值大於 $-\pi$，它本身已是主輻角（$n=0$）；否則它落在 $(-\frac{3\pi}{2},-\pi]$ 內，加上 2π 便回到範圍之內（$n=1$）。故此

$$\arg(u_1-u_2) = \tfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2-\pi)+2n\pi, \qquad n=0 \text{ 或}1,$$

正如題目所求。

兩個乘積的輻角相同

以上推導除了用到 $\theta_1<\theta_2$ 且兩者皆在 $(-\pi,\pi)$ 內之外，並沒有用到 u_1,u_2 的任何其他性質。所以對任意 $j<k$，

$$u_j-u_k = 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k-\theta_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j+\theta_k-\pi)/2},$$
$$u_k-u_j = -(u_j-u_k) = 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k-\theta_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j+\theta_k+\pi)/2},$$

其中用了 $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$，而兩式前面的實數因子都是正數。對 $j<k$，記 $s_{jk}=\sin\frac{1}{2}(\theta_k-\theta_j)>0$，並記 $\Sigma=\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4$。相乘（輻角相加），

$$(u_1-u_2)(u_4-u_3) = 4s_{12}s_{34}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1+\theta_2-\pi)+(\theta_3+\theta_4+\pi)]/2} = 4s_{12}s_{34}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2},$$
$$(u_1-u_4)(u_3-u_2) = 4s_{14}s_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1+\theta_4-\pi)+(\theta_2+\theta_3+\pi)]/2} = 4s_{14}s_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}.$$

兩者都是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$ 的正數倍，所以各自的輻角都是 $\frac{1}{2}\Sigma$（可相差 2π 的倍數）。因此它們的主輻角只可能相差 2π 的倍數：

$$\arg((u_1-u_2)(u_4-u_3)) = \arg((u_1-u_4)(u_3-u_2))+2n\pi$$

其中 n 為某個整數。（事實上 $n=0$，因為兩個主輻角若相差 2π 的倍數，就必定相等；但題目只要求較弱的這個結論。）

最後一部分

把三個乘積記為

$$A=(u_1-u_2)(u_4-u_3), \qquad B=(u_1-u_4)(u_3-u_2), \qquad C=(u_1-u_3)(u_4-u_2).$$

展開得

$$\begin{aligned} A+B &= (u_1u_4-u_1u_3-u_2u_4+u_2u_3)+(u_1u_3-u_1u_2-u_3u_4+u_2u_4)\\ &= u_1u_4+u_2u_3-u_1u_2-u_3u_4,\\ C &= u_1u_4-u_1u_2-u_3u_4+u_2u_3, \end{aligned}$$

所以 $A+B=C$。這純粹是代數運算，對任意四個複數都成立。

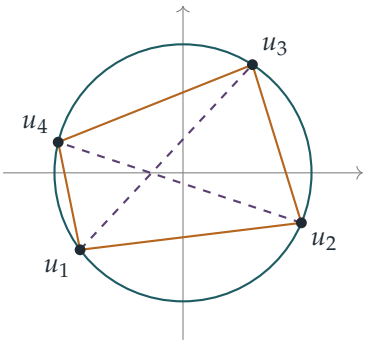
現在利用上一部分的結果：$A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$ 及 $B = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$，其中 $a = 4s_{12}s_{34} > 0$，$b = 4s_{14}s_{23} > 0$。於是 $|A| = a$，$|B| = b$，並且

$$|C| = |A+B| = |(a+b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}| = a+b = |A|+|B|,$$

因為 $a+b>0$ 而 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}| = 1$。即是說，

$$|(u_1-u_2)(u_4-u_3)| + |(u_1-u_4)(u_3-u_2)| = |(u_1-u_3)(u_4-u_2)|.$$

重點在於：三角不等式（triangle inequality）$|A+B| \le |A|+|B|$ 恰好在 A 與 B 指向同一方向時變成等式，而這正是中間部分所證明的。



從幾何角度看，$|u_j-u_k|$ 是一條弦的長度；又因為輻角遞增，$u_1u_2u_3u_4$ 是一個頂點依次排列的圓內接四邊形（quadrilateral inscribed in the circle）。這條恆等式說明：兩組對邊之積的和，等於兩條對角線（虛線）之積。這就是托勒密定理（Ptolemy's theorem）。

驗算

- 正方形：$\theta_k = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$。每條邊長 $\sqrt{2}$，每條對角線長 2，而確實 $2+2=4$。
- 取 $\theta = (-2.5, -0.4, 1.0, 2.9)$，得 $|A| \approx 2.8223$，$|B| \approx 1.1013$ 及 $|C| \approx 3.9236 = |A|+|B|$。
- 隨機選取 2×10^5 組依次排列的 θ_k，$\arg(u_1-u_2)$ 的公式每次都以 $n=0$ 或 1 成立（兩個值都有出現），而恆等式的誤差不超過 2×10^{-15}。

常見錯誤

- 寫出 $u_1-u_2 = 2\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$ 後，把輻角讀成 $\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\pi)$，忘記了正弦是負數。

- 把 $u_4 - u_3$ 當作與 $u_3 - u_4$ 有相同的輻角：把差的次序倒轉，輻角會增加 π。
- 斷言 $|A| + |B| = |A + B|$ 而不說明原因；這需要 A 與 B 的輻角相同。

STEP 之外

托勒密定理有逆定理（converse），也有更一般的形式：對平面上任意四點，$|A| + |B| \geq |C|$（只是把三角不等式應用於 $A + B = C$），等號恰好在四點依次位於同一個圓或同一條直線上時成立。這背後是交比（cross-ratio）$\frac{(u_1-u_2)(u_3-u_4)}{(u_1-u_4)(u_3-u_2)}$：它恰好在四點共圓（concyclic）時為實數，並且在莫比烏斯變換（Möbius transformations）下保持不變，是大學一年級複分析（complex analysis）與幾何的核心對象。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）以精彩的圖畫闡述了這些想法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。