詳細解答

STEP III 2002，第 7 題

純數學 • 坐標幾何恆等式

> **STEP III 2002，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q7

關鍵思路

$s^2+b^2-a^2$ 這個式子應該似曾相識：在三角形 OAB 中（其中 $OA=s$、$OB=b$）使用餘弦定理（cosine rule），得出的正是這個式子。因此，第一個恆等式（identity）其實就是開首關於 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta$ 的結果，應用於 OB 與兩條坐標軸所成的兩個角。其後，第二個恆等式純粹是建基於第一個恆等式的代數運算，而不等式（inequality）亦隨之而來，因為兩個平方之和必不小於其中任何一個平方。

解答

關於角的結果

首先假設 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}\pi$。則 $\cos\beta=\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha)=\sin\alpha$，所以

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

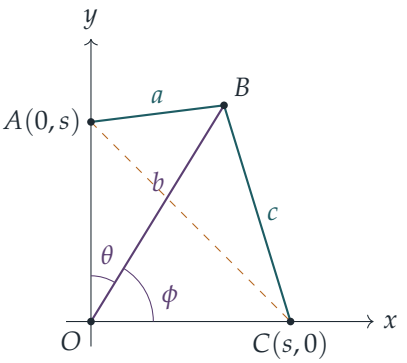
反過來，假設 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$。則 $\cos^2\beta=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$。$\alpha$ 和 β 都是銳角（acute angle），所以 $\cos\beta>0$ 且 $\sin\alpha>0$，取正平方根便得

$$\cos\beta=\sin\alpha=\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha).$$

現在 β 和 $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ 都在 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 之內，而餘弦在這個區間上嚴格遞減（strictly decreasing），因此每個值只取一次。故此 $\beta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$，即 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}\pi$。這就證明了「當且僅當」（if and only if）。

第一個恆等式

設 $\theta=\angle AOB$ 及 $\phi=\angle BOC$。



在三角形 OAB（邊長 $OA = s$、$OB = b$、$AB = a$）和三角形 OCB（邊長 $OC = s$、$OB = b$、$CB = c$）中使用餘弦定理，得

$$\cos\theta = \frac{s^2 + b^2 - a^2}{2sb}, \qquad \cos\phi = \frac{s^2 + b^2 - c^2}{2sb}.$$

由於 B 位於開的第一象限（open first quadrant）內，射線 OB 嚴格地夾在正 y 軸（沿 OA 方向）與正 x 軸（沿 OC 方向）之間。所以 θ 和 ϕ 都是銳角，且 $\theta + \phi = \frac{1}{2}\pi$。根據上面「僅當」的方向，$\cos^2\theta + \cos^2\phi = 1$，即

$$\frac{(s^2 + b^2 - a^2)^2}{4s^2b^2} + \frac{(s^2 + b^2 - c^2)^2}{4s^2b^2} = 1.$$

兩邊乘以 $4s^2b^2$，便得第一個恆等式：

$$(s^2 + b^2 - a^2)^2 + (s^2 + b^2 - c^2)^2 = 4s^2b^2.$$

（若要直接驗證，可設 $B = (x, y)$。則 $a^2 = x^2 + (y - s)^2$、$b^2 = x^2 + y^2$ 及 $c^2 = (x - s)^2 + y^2$，所以 $s^2 + b^2 - a^2 = 2sy$ 及 $s^2 + b^2 - c^2 = 2sx$，而左方等於 $4s^2(x^2 + y^2) = 4s^2b^2$。）

第二個恆等式

為了令代數運算保持整潔，設

$$P = s^2 + b^2 - a^2, \qquad Q = s^2 + b^2 - c^2, \qquad S = s^2 + b^2, \qquad D = s^2 - b^2,$$

於是 $a^2 = S - P$ 及 $c^2 = S - Q$。第一個恆等式說的是 $P^2 + Q^2 = 4s^2b^2$。由於 $4s^2b^2 = (s^2 + b^2)^2 - (s^2 - b^2)^2 = S^2 - D^2$，它可以改寫成

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2. \tag{†}$$

現在 $a^2 + c^2 = 2S - P - Q$，而 $2s^2 = S + D$、$2b^2 = S - D$，所以

$$2s^2 - a^2 - c^2 = (P + Q - S) + D, \qquad 2b^2 - a^2 - c^2 = (P + Q - S) - D.$$

想一想 為甚麼值得把它們拆成 $(P+Q-S)\pm D$ 的形式？

因為 $(u+D)^2+(u-D)^2=2u^2+2D^2$：交叉項互相抵銷，於是 D 只以 D^2 的形式出現，而 (†) 讓我們可以把它換成只涉及 P、Q 和 S 的式子。取 $u=P+Q-S$，

$$\begin{aligned}&(2s^2-a^2-c^2)^2+(2b^2-a^2-c^2)^2\\&\quad=2(P+Q-S)^2+2D^2\\&\quad=2(P^2+Q^2+S^2+2PQ-2PS-2QS)+2(S^2-P^2-Q^2)\\&\quad=4S^2-4PS-4QS+4PQ\\&\quad=4(S-P)(S-Q)\\&\quad=4a^2c^2,\end{aligned}$$

其中第二行用了 (†)。這就是第二個恆等式。

不等式

第二個恆等式左方的兩個平方都是非負的，所以

$$(2b^2-a^2-c^2)^2\le 4a^2c^2,\qquad \text{所以}\qquad |2b^2-a^2-c^2|\le 2ac,$$

這裏取了非負平方根（注意 $a,c>0$）。這即是說

$$-2ac\le 2b^2-a^2-c^2\le 2ac,$$

亦即

$$a^2-2ac+c^2\le 2b^2\le a^2+2ac+c^2,$$

也就是 $(a-c)^2\le 2b^2\le(a+c)^2$，正是所求。

等號恰好在 $2s^2=a^2+c^2$ 時成立。由於 $AC^2=2s^2$，根據畢氏定理的逆定理（converse of Pythagoras），這表示 $\angle ABC$ 是直角：B 位於以 AC 為直徑的圓上。

驗算

- 取 $s=2$ 及 $B=(1,3)$。則 $a^2=2$、$b^2=c^2=10$。第一個恆等式成為 $12^2+4^2=160=4\cdot 4\cdot 10$；第二個恆等式成為 $(-4)^2+8^2=80=4\cdot 2\cdot 10$；而不等式則是 $3.06\le 20\le 20.94$。
- 點 $B=(s,s)$ 是正方形的第四個頂點，所以 $\angle ABC$ 是直角，且 $a=c=s$、$b=s\sqrt{2}$：於是 $2b^2=4s^2=(a+c)^2$，正是等號成立的情況。
- 在 2×10^5 個點 B 上對全部三個結果作隨機測試，沒有發現任何不成立的情況。

常見錯誤

- 在逆命題中漏掉銳角這個條件：沒有這個條件，$\cos^2\beta = \sin^2\alpha$ 並不能推出 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$（例如 $\beta = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ 同樣滿足）。
- 不利用第一個恆等式，而以 a, b, c, s 硬生生地展開第二個恆等式。這樣做是可行的，但很容易漏掉某一項；採用 S、D 的代換，可令運算不致失控。
- 對 $(2b^2 - a^2 - c^2)^2 \leq 4a^2c^2$ 取平方根時漏掉絕對值（modulus），結果只得到不等式的其中一半。

STEP 之外

$2b^2 - a^2 - c^2$ 這個量等於 $2s(x + y - s)$，即三角形 ABC 面積的 ± 4 倍，所以第二個恆等式其實是把餘弦定理和面積公式 $\frac{1}{2}ac\sin B$ 合併成 $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$。上界亦是托勒密不等式（Ptolemy's inequality）的一個特例：對任意四點，$OB \cdot AC \leq OA \cdot BC + OC \cdot AB$，而等號在圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）的情況下成立，在這裏即是 $bs\sqrt{2} \leq s(a + c)$。這類距離之間的關係，可以引伸至度量空間（metric space）和距離幾何（distance geometry）的研究；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題集）中有更多同類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。