詳細解答

STEP III 2002，第 6 題

純數學 • 非線性微分方程

STEP III 2002，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s3-q6

關鍵思路

這條方程因為有四次方而顯得嚇人，但 $y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 正好是 y^2 的導數（derivative）的一半。因此作代換（substitution）$u = y^2 - 1$：方程隨即化簡為只含 u 和 u' 的方程，取平方根之後便可分離變數（separate variables）。唯一要小心的是正負號：u 的正負號把平面分成帶狀區域 $|y| < 1$ 和區域 $|y| > 1$，兩者給出不同的曲線族（family of curves）。

解答

設 $u = y^2 - 1$，則 $u' = 2y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，而 $y^4(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^4 = (\frac{1}{2}u')^4$。方程變成

$$\tfrac{1}{16}(u')^4 = u^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u')^2 = 4|u|,$$

這裏對兩邊取非負平方根（$(u')^2$ 和 $4|u|$ 都是非負的，所以沒有遺漏任何解）。

首先留意，解曲線（solution curve）永遠不會與 $y = 0$ 相遇：在那裏原方程的左邊是 0，右邊卻是 1。所以凡經過任何一個給定點的解，都處處滿足 $y > 0$。

想一想 怎樣解 $(u')^2 = 4u$，而不必為 u' 該取哪個正負號而煩惱？

在 $u > 0$ 之處，可以寫 $u = v^2$，其中 $v = \sqrt{u} > 0$。於是 $u' = 2vv'$，所以 $(u')^2 = 4u$ 變成 $4v^2(v')^2 = 4v^2$，即 $(v')^2 = 1$。由於 v' 連續而且永不為零，它的正負號保持不變，所以 $v' = \pm 1$，並且 $v = \pm(x - a)$，其中 a 為某個常數。無論哪一種情況，都有

$$u = v^2 = (x - a)^2.$$

正負號的不確定性在平方之後自然消失。對 $u < 0$ 的情況，以 $u = -v^2$ 作同樣的論證即可。

第 (i) 部分：經過 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

這裏 $y^2 = \frac{3}{4} < 1$，所以在這點附近 $u < 0$，即 $|y| < 1$。寫 $1 - y^2 = -u = v^2$，其中 $v > 0$；那麼 $(u')^2 = -4u$ 給出 $(v')^2 = 1$，與上面完全一樣，所以 $1 - y^2 = (x - a)^2$，也就是

$$(x - a)^2 + y^2 = 1 :$$

圓心在 x 軸上、半徑為 1 的圓。在 $x = 0$ 處需要 $a^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$，所以 $a = \pm\frac{1}{2}$。由於 $y > 0$，經過 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ 的解曲線是上半圓

$$y = \sqrt{1 - (x - \tfrac{1}{2})^2} \qquad 及 \qquad y = \sqrt{1 - (x + \tfrac{1}{2})^2}.$$

直接驗證：在 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 上，隱函數微分（implicit differentiation）給出 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(x - a)$，所以 $y^4(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^4 = (x - a)^4 = (1 - y^2)^2 = (y^2 - 1)^2$。✓

第 (ii) 部分：經過 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{5})$

現在 $y^2 = \frac{5}{4} > 1$，所以 $u > 0$，上面的論證給出 $y^2 - 1 = (x - a)^2$，也就是

$$y^2 - (x - a)^2 = 1 :$$

中心為 $(a, 0)$ 的等軸雙曲線（rectangular hyperbola）。在 $x = 0$ 處，$a^2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$，所以同樣有 $a = \pm\frac{1}{2}$，而由於 $y > 0$，解曲線是上支

$$y = \sqrt{1 + (x - \tfrac{1}{2})^2} \qquad 及 \qquad y = \sqrt{1 + (x + \tfrac{1}{2})^2},$$

對所有 x 都有定義。直接驗證：$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - a$，所以左邊是 $(x - a)^4 = (y^2 - 1)^2$。✓

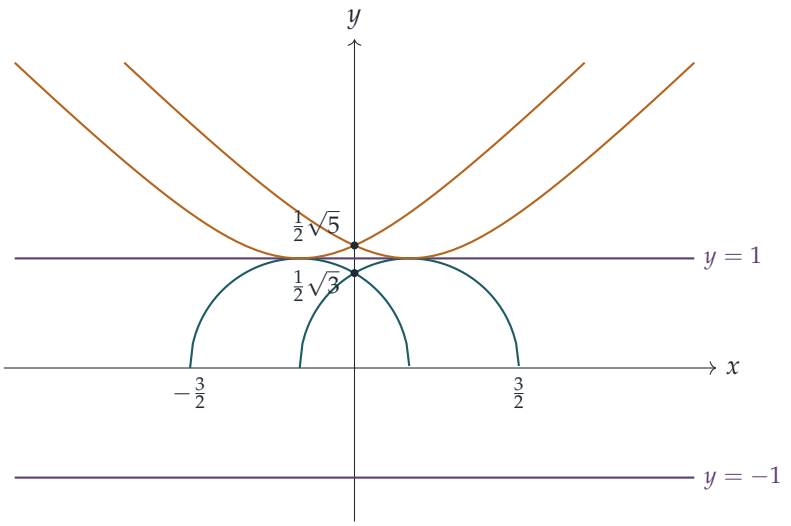
直線 $y = \pm 1$

若對所有 x 都有 $y = 1$ 或 $y = -1$，則 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，所以左邊是 0；而 $y^2 - 1 = 0$，所以右邊也是 0。兩條直線都是解。

想一想 這兩條直線與那些圓和雙曲線有甚麼關係？

每個圓 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 和每條雙曲線 $y^2 - (x - a)^2 = 1$ 都在 $(a, 1)$ 以零斜率與 $y = 1$ 相切（同樣地，在 $(a, -1)$ 與 $y = -1$ 相切）。所以 $y = \pm 1$ 是這兩個曲線族的包絡線（envelope），而它們並不屬於任何一族：它們來自 $u = 0$，而我們除以 v 時已把這情況排除在外。由此得出一個結果：經過 $y = 1$ 上的點的解並不唯一。例如，沿着 $a = \frac{1}{2}$ 的圓由 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ 走到它的頂點 $(\frac{1}{2}, 1)$，然後沿 $y = 1$ 走一段，再在 $x \geq b$ 時沿雙曲線 $y = \sqrt{1 + (x - b)^2}$ 向上走（任意 $b \geq \frac{1}{2}$ 皆可），便得到一條足夠光滑（斜率連續）而且處處滿足方程的曲線。上面四條曲線是經過給定點的「基本」解；經過這些點的其他每一個解，都是由這些曲線、$y = 1$，以及其他與 $y = 1$ 相切的圓和雙曲線的片段拼合而成。

略圖



半圓（藍綠色）的圓心為 $(\pm\frac{1}{2}, 0)$，半徑為 1，在 $x = \pm\frac{1}{2} \pm 1$ 處垂直地與 x 軸相遇，並在 $x = \pm\frac{1}{2}$ 處與 $y = 1$ 相切。雙曲線的分支（琥珀色）在同樣的兩點與 $y = 1$ 相切，其漸近線（asymptote）為 $y = \pm(x \mp \frac{1}{2})$，即它們的增長與 $|x|$ 相若。每一對曲線都關於 y 軸對稱，而每對的兩條曲線在該軸上的給定點相交。

驗算

- 在 $a = \frac{1}{2}$ 的圓上的點 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$：$y' = -(x-a)/y = 1/\sqrt{3}$，所以左邊是 $\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{16}$，而右邊是 $(\frac{3}{4} - 1)^2 = \frac{1}{16}$。
- 由 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{5})$ 出發，取正號對 $y' = \pm\sqrt{|y^2 - 1|}/y$ 作數值積分，得 $y(1.5) = 2.2360680$，與 $a = -\frac{1}{2}$ 的雙曲線上的 $\sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$ 吻合。

常見錯誤

- 在兩個區域都把平方根取成 $(u')^2 = 4u$；對 $|y| < 1$ 而言，這沒有實數解，於是那些圓就遺漏了。
- 在每一步只保留平方根的其中一個正負號，結果經過每個點只找到一條曲線，而不是兩條。
- 忘記了 $y = \pm 1$ 並不屬於任何一族，儘管它們與每一個成員都相切。

STEP 之外

直線 $y = \pm 1$ 是奇解（singular solution）：它們是通解（general solution）的包絡線，無論常數 a 取甚麼值都得不出來。它們恰恰出現在一階方程的唯一性定理（皮卡–林德勒夫定理，Picard–Lindelöf）失效之處，因為 $\sqrt{|y^2 - 1|}$ 在 $y = \pm 1$ 處不滿足利普希茨（Lipschitz）條件，這正是解可以在那裏分岔的原因。這類包絡線常見於對 y' 而言並非線性的一階方程（克萊羅（Clairaut）方程是經典例子）；Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）討論了存在性與唯一性，以及它們在甚麼情況下失效。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。