詳細解答

STEP III 2002，第 5 題

純數學 • 四次方程的因式分解

> **STEP III 2002，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q5

關鍵思路

一個二次式是某個完全平方（perfect square）的常數倍，當且僅當它的判別式（discriminant）等於零。第一部分的全部內容就是這一點，而它也是其餘部分的原動力：如果我們能選取 t，使得某個二次式的平方減去該四次式（quartic）後是一個完全平方的倍數，那麼這個四次式就是*兩個平方之差*（difference of two squares），可以立即因式分解（factorise）。這就是費拉里（Ferrari）解四次方程的經典方法，它把四次方程的問題換成一個關於 t 的三次方程（cubic）。

解答

二次式的條件

設 $p \neq 0$。配方（completing the square）得

$$px^2 + qx + r = p\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p}.$$

這個式子可寫成 $p(x+h)^2$（h 為某個數）的形式，當且僅當常數 $r - \frac{q^2}{4p}$ 等於零，即

$$q^2 = 4pr,$$

此時 $h = \frac{q}{2p}$。（反過來，展開 $p(x+h)^2 = px^2 + 2phx + ph^2$ 可得 $q^2 = 4p^2h^2 = 4pr$，所以這個條件既是充分條件，也是必要條件。）若 $p = 0$，唯一的可能是 $q = r = 0$；條件 $q^2 = 4pr$ 仍然迫使 $q = 0$，但我們還需要 $r = 0$。

t 所滿足的方程

展開得

$$(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t)^2 = x^4+bx^3+(\tfrac{1}{4}b^2+2t)x^2+btx+t^2.$$

選用 $\frac{1}{2}b$，正是為了在減去四次式時令 x^3 項互相抵消（x^4 項也同樣抵消）：

$$(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t)^2-(x^4+bx^3+cx^2+dx+e) = (\tfrac{1}{4}b^2+2t-c)x^2+(bt-d)x+(t^2-e).$$

這是一個二次式，其中 $p=\frac{1}{4}b^2+2t-c$、$q=bt-d$ 及 $r=t^2-e$，而我們希望它等於 $k(x+h)^2$，即一個完全平方的倍數（倍數就是 $k=p$）。根據第一部分，t 必須滿足

$$(bt-d)^2 = 4(\tfrac{1}{4}b^2+2t-c)(t^2-e).$$

這是一個關於 t 的三次方程（右邊 t^3 項的係數是 8，而左邊只是 t 的二次式），所以它必定有至少一個實根（real root）。

分解四次式

這裏 $b=6$、$c=9$、$d=-2$、$e=-7$，所以

$$\tfrac{1}{4}b^2+2t-c = 2t, \qquad bt-d = 6t+2, \qquad t^2-e = t^2+7.$$

t 所滿足的方程變成

$$\begin{aligned}(6t+2)^2 &= 8t(t^2+7)\\ 36t^2+24t+4 &= 8t^3+56t\\ 0 &= 2t^3-9t^2+8t-1.\end{aligned}$$

想一想 怎樣才能快速找出這個三次方程的一個根？

先試較小的數值：各係數之和是 $2-9+8-1=0$，所以 $t=1$ 是一個根。任何一個根都可以用，因為每個根都給出一個有效的因式分解；最簡單的根給出最簡單的分解。

取 $t=1$，所得的差是

$$2x^2+8x+8 = 2(x+2)^2,$$

所以 $k=2$ 及 $h=2$，而且確實有 $8^2=4\cdot 2\cdot 8$。因此

$$(x^2+3x+1)^2-(x^4+6x^3+9x^2-2x-7) = 2(x+2)^2,$$

即

$$x^4+6x^3+9x^2-2x-7 = (x^2+3x+1)^2-(\sqrt{2}\,(x+2))^2.$$

這是兩個平方之差，所以

$$\begin{aligned} x^4+6x^3+9x^2-2x-7 &= (x^2+3x+1-\sqrt{2}(x+2))(x^2+3x+1+\sqrt{2}(x+2)) \\ &= (x^2+(3-\sqrt{2})x+1-2\sqrt{2})(x^2+(3+\sqrt{2})x+1+2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

由於 $k=2>0$，它的平方根是實數，所以這是兩個實係數的二次因式，正如題目所要求。

三次方程的另外兩個根是由 $2t^2-7t+1=0$ 得出的 $t=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{41})$，它們同樣滿足 $k=2t>0$，並給出另外兩種把四次式的四個（實）根配對成實二次因式的方法。這兩種分解的係數繁複得多，所以應該選用 $t=1$。

驗算

- 乘開：兩個因式之積的 x^3 係數是 $(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=6$，常數項是 $(1-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})=1-8=-7$，兩者皆正確。
- 當 $x=1$ 時，四次式的值是 $1+6+9-2-7=7$，而因式分解給出 $(5-\sqrt{2}-2\sqrt{2})(5+\sqrt{2}+2\sqrt{2})=25-18=7$。
- 兩個因式的判別式分別是 $7+2\sqrt{2}\approx 9.83$ 和 $7-2\sqrt{2}\approx 4.17$，兩者皆為正數，所以四次式有四個實根，這與三次方程的三個根全都給出實因式分解一致。我們亦在 200 個隨機點上以數值方法核對過這個因式分解。

常見錯誤

- 把 $(x^2+\frac{1}{2}bx+t)^2$ 的 x^2 係數算錯：它應是 $\frac{1}{4}b^2+2t$，因為除了 $(\frac{1}{2}bx)^2$ 之外，交叉項 $2\cdot x^2\cdot t$ 也有貢獻。
- 把判別式條件寫成 $q^2=pr$，或者忘記 k 就是首項係數（leading coefficient）$\frac{1}{4}b^2+2t-c$，而它必須是正數才能得到實因式分解。

STEP 之外

這個關於 t 的三次方程稱為*預解三次式*（resolvent cubic），而這就是費拉里在十六世紀提出的方法：每個四次方程都可以化為一個三次方程，再用卡爾達諾（Cardano）公式求解。這個方法行得通的深層原因，以及一般五次方程（quintic）沒有這類公式的原因，都屬於伽羅瓦理論（Galois theory）的範疇，該理論研究的是多項式的根可以怎樣置換（permute）。若想初步認識域（field）與多項式的代數，可以讀 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。