詳細解答

STEP III 2002，第 4 題

純數學 • 丟番圖不等式

> **STEP III 2002，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q4

關鍵思路

方程 $x^3+x^2=y^3-y^2$ 的一邊增長得快，另一邊卻被 $-y^2$ 拖住，所以 y 必須「超越」x，但超出的幅度又不足 1。這兩個不等式（inequality）把 y 嚴格夾在 x 與 $x+1$ 之間，而這個空隙容不下任何整數。至於最後一部分，額外的解只可能來自零或負數的取值，而一個巧妙的對稱性（symmetry）——把 (m,n) 換成 $(-n,-m)$——可以把分類討論的工夫減半。

解答

第一個結果

設 $x,y>0$ 且 $x^3+x^2=y^3-y^2$，並用反證法（proof by contradiction）假設 $x\geq y$。由於立方和平方在正實數上都是遞增的，

$$x^3+x^2\geq y^3+y^2>y^3-y^2,$$

其中嚴格不等的一步用到 $y^2>0$。這與方程矛盾，所以 $x<y$。

第二個結果

現在設 $0<x\leq y-1$，於是 $y\geq x+1>1$。記 $f(t)=t^3-t^2$。那麼當 $t>\frac{2}{3}$ 時，$f'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)>0$，所以 f 在 $[1,\infty)$ 上是遞增函數（increasing function）。

由於 $y \geq x+1$，而且兩者都在這個區間內，

$$\begin{aligned} y^3 - y^2 = f(y) &\geq f(x+1) = (x+1)^2((x+1)-1) \\ &= x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x \\ &= (x^3 + x^2) + (x^2 + x) \\ &> x^3 + x^2, \end{aligned}$$

因為當 $x > 0$ 時 $x^2 + x > 0$。所以 $x^3 + x^2 < y^3 - y^2$，這正是所要證明的。

把兩個結果合起來可知：對於正數 x，任何滿足 $x^3 + x^2 = y^3 - y^2$ 的正數 y 都符合

$$x < y < x+1.$$

沒有正整數對

假設正整數 a 和 b 滿足 $a^3 - b^3 = a^2 + b^2$。右邊是正數，所以 $a^3 > b^3$，即 $a > b$。移項後得

$$b^3 + b^2 = a^3 - a^2,$$

這正是上面的方程，其中 $x = b$、$y = a$，兩者皆為正數。所以 $b < a < b+1$。

> **想一想** 整數這個條件究竟用在哪裏？

只用在這裏：沒有整數嚴格介乎 b 與 $b+1$ 之間。換個說法，$a > b$ 而 a, b 都是整數，就必有 $a \geq b+1$，即 $0 < b \leq a-1$，於是第二個結果給出 $b^3 + b^2 < a^3 - a^2$，與方程矛盾。所以這樣的正整數對並不存在。（若在實數範圍內，解多的是：對每個 $x > 0$ 都有一個 $y \in (x, x+1)$；只是整數剛好碰不上它們。）

所有整數對

現在要找出所有整數 m, n，使得

$$m^3 - n^3 = m^2 + n^2. \qquad (*)$$

以下兩點觀察可以省卻不少工夫。

- 若 (m, n) 是解，則 $(-n, -m)$ 也是解：事實上 $(-n)^3 - (-m)^3 = m^3 - n^3$，而平方和保持不變。
- $(*)$ 的右邊非負，所以 $m^3 \geq n^3$，即 $m \geq n$，而等號只在 $m^2 + n^2 = 0$ 時成立，即 $m = n = 0$。

其中一個是零。若 $n = 0$，則 $m^3 = m^2$，所以 $m = 0$ 或 $m = 1$。若 $m = 0$，則 $-n^3 = n^2$，所以 $n = 0$ 或 $n = -1$。這樣得到 $(0,0)$、$(1,0)$ 和 $(0,-1)$（最後一個是 $(1,0)$ 在上述對稱下的像）。

兩個都是正數。根據上一部分，這是不可能的。

兩個都是負數。這時 $-n$ 和 $-m$ 都是正數，而 $(-n,-m)$ 就會是一個兩項皆正的解，這是不可能的。

正負號相反。由於 $m>n$，我們有 $m>0>n$。記 $n=-p$，其中 $p\geq 1$。那麼 $(*)$ 變成

$$m^3+p^3=m^2+p^2, \qquad \text{即} \qquad m^2(m-1)+p^2(p-1)=0.$$

對於正整數，兩項都 ≥ 0，所以兩項都等於零，於是必有 $m=p=1$。這樣得到 $(1,-1)$，而確實 $1-(-1)=2=1+1$。

所以 $m^3-n^3=m^2+n^2$ 的整數解 (m,n) 恰好是

$$(m,n)=(0,0),\quad (1,0),\quad (0,-1),\quad (1,-1).$$

如果「整數對」的意思不包括平凡（trivial）的那一對，就剔除 $(0,0)$。

驗算

每一對都可以用手驗算：對於 $(1,0)$，$1-0=1=1+0$；對於 $(0,-1)$，$0-(-1)=1=0+1$；對於 $(1,-1)$，$2=2$。用電腦搜尋所有 $|m|,|n|\leq 300$ 的情況，找到的正好是這四個解。至於頭兩個結果的驗算：對隨機選取的 $x>0$ 以數值方法解 $y^3-y^2=x^3+x^2$，每次都得到 $x<y<x+1$；例如 $x=1$ 時 $y\approx 1.696$。

常見錯誤

- 在最後一部分忘記了零和負整數，而所有的解偏偏都在那裏。
- 想當然地認定兩個整數中哪一個排在「前面」。這裏立方差是正數，所以較大的數必須排在前面；這一點要寫明。
- 證明第二個結果時只是「展開」了事，沒有指出 t^3-t^2 在 $t\geq 1$ 時遞增；$f(y)\geq f(x+1)$ 這一步正需要這個性質。

STEP 之外

「實數解被嚴格夾在兩個相鄰整數之間，所以沒有整數解」這個論證，是研究丟番圖方程（Diophantine equation）的標準工具，面對整數多項式方程時，往往也是第一樣值得一試的方法。許多這類方程只有有限多個解，也是靠這樣給解定出界限來證明的，然後就可以用有限的搜尋把解全部找出來。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本數論入門書）是這類數論的絕佳入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。