詳細解答

STEP III 2002，第 3 題

純數學 • 曲線描繪

STEP III 2002，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s3-q3

關鍵思路

一切都取決於圖像的形狀：圖像由 $x = b$ 出發，起點處有一條鉛垂切線（vertical tangent），曲線向下走，降至唯一的極小值（minimum），然後無止境地上升。只要知道起點的高度和極小值的高度，要數出 $\mathrm{f}(x) = c$ 有多少個解，只需在高度 c 處畫一條水平線，看看它與曲線相交多少次。其後兩條數值方程都是特殊情況，它們的 c^2 值分別落在這些範圍的邊界上和內部。

解答

圖像

在左端，$\mathrm{f}(b) = a\sqrt{b}$。對 $x > b$ 求導，得

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-b}}.$$

當 $x \to b^+$ 時，第二項趨向 $-\infty$，所以曲線離開點 $(b, a\sqrt{b})$ 時是筆直向下的（鉛垂切線）。

由於兩個平方根均為正數，

$$\mathrm{f}'(x) < 0 \iff a\sqrt{x-b} < \sqrt{x} \iff a^2(x-b) < x \iff x < \frac{a^2 b}{a^2-1},$$

其中最後一步用到 $a^2 - 1 > 0$。因此 f 在 $[b, x_0]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），在 $[x_0, \infty)$ 上嚴格遞增（strictly increasing），其中

$$x_0 = \frac{a^2 b}{a^2-1}.$$

在極小點處，$x_0 - b = \dfrac{b}{a^2-1}$，所以

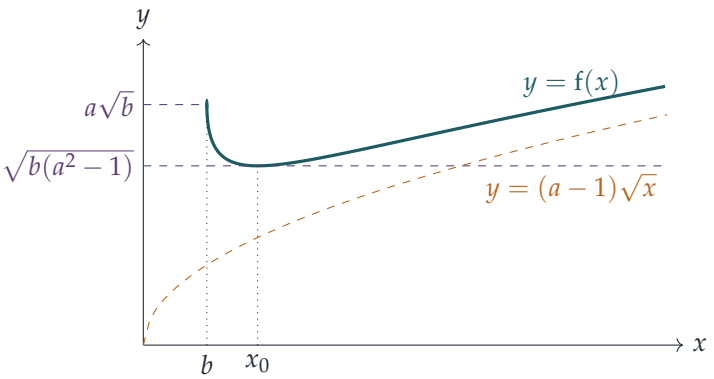
$$\mathrm{f}(x_0) = a\cdot\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{(a^2-1)\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{b(a^2-1)}.$$

當 x 很大時，有理化（rationalising）後得

$$\mathrm{f}(x) = (a-1)\sqrt{x} + (\sqrt{x} - \sqrt{x-b}) = (a-1)\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}+\sqrt{x-b}},$$

所以，因為 $a > 1$，$\mathrm{f}(x) \to \infty$，而且曲線位於 $y = (a-1)\sqrt{x}$ 稍上方，並隨 $x \to \infty$ 向它靠近。

最後，起點的高度高於極小值：$a^2 b > (a^2-1)b$，所以 $a\sqrt{b} > \sqrt{b(a^2-1)}$。



數算解的個數

記極小值為 $m = \sqrt{b(a^2-1)}$，起點的值為 $M = a\sqrt{b}$，於是 $0 < m < M$。在兩段單調（monotonic）的部分上，f 各自連續（continuous）且嚴格單調，所以它對值域內的每個值都恰好取一次：

- 在 $[b, x_0]$ 上，f 對 $[m, M]$ 內的每個值恰好取一次；
- 在 $[x_0, \infty)$ 上，f 對 $[m, \infty)$ 內的每個值恰好取一次。

這兩段只有 x_0 一個公共點，該處的函數值為 m。

由於對所有 $x \geq b$ 均有 $\mathrm{f}(x) \geq m$，當 $c < m$ 時方程 $\mathrm{f}(x) = c$ 無解。對 $c > 0$ 而言，這等同於 $c^2 < m^2$，即

$$c^2 < b(a^2-1) \quad \Longrightarrow \quad \text{無解},$$

這正是要證明的結果。至於其餘情況：

? **想一想** 為甚麼 $c^2 = a^2 b$ 時有兩個解，而不是一個？

當 $c = M$ 時，左邊一段提供的解正是端點 $x = b$ 本身；由於定義域（domain）包含 $x = b$，它是一個名正言順的解。右邊一段則在更遠處再提供一個解。只有當 $c > M$ 時，左邊一段才不再提供解。因此，對 $c > 0$：

- 當 $c^2 = b(a^2 - 1)$（只有 $x = x_0$，即直線剛好碰到極小點），或當 $c^2 > a^2 b$（只有上升的一支能到達這個高度）時，**恰有一個解**；
- 當 $b(a^2 - 1) < c^2 \leq a^2 b$（兩支各有一個）時，**恰有兩個解**。

第 (i) 部分

這裏 $a = 3$，$b = 2$，$c = 4$，所以 $b(a^2 - 1) = 16 = c^2$：直線剛好碰到極小點，方程恰有一個解，

$$x = x_0 = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}.$$

確實有 $3 \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$。直接計算亦可：把方程改寫成 $3\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x - 2}$ 再兩邊平方，得 $8x - 24\sqrt{x} + 18 = 0$，即 $(2\sqrt{x} - 3)^2 = 0$。重根（repeated root）正是相切在代數上的標記。

第 (ii) 部分

這裏 $a = 3$，$b = 3$，$c = 5$，所以 $b(a^2 - 1) = 24 < 25 = c^2 < 27 = a^2 b$，方程恰有兩個解。要求出這兩個解，把方程寫成 $3\sqrt{x} - 5 = \sqrt{x - 3}$ 再兩邊平方：

$$9x - 30\sqrt{x} + 25 = x - 3 \quad \Longrightarrow \quad 4x - 15\sqrt{x} + 14 = 0.$$

把它看成 $\sqrt{x}$ 的二次方程，有 $(\sqrt{x} - 2)(4\sqrt{x} - 7) = 0$，所以 $\sqrt{x} = 2$ 或 $\sqrt{x} = \frac{7}{4}$，由此得

$$x = 4 \qquad 或 \qquad x = \frac{49}{16}.$$

平方可能會引入增根（spurious roots），所以我們把兩個值都代入原方程驗算。兩者都滿足 $x \geq 3$（因為 $\frac{49}{16} = 3.0625$），而且

$$3 \cdot 2 - \sqrt{1} = 5, \qquad 3 \cdot \tfrac{7}{4} - \sqrt{\tfrac{1}{16}} = \tfrac{21}{4} - \tfrac{1}{4} = 5.$$

所以兩個都是真正的解，與之前數出的兩個解吻合。一如所料，它們分別位於 $x_0 = \frac{27}{8} = 3.375$ 的兩側。

驗算

- 取 $a = \frac{3}{2}$，$b = 2$（即草圖所用的數值），則 $x_0 = \frac{18}{5}$，而 $\mathrm{f}(\frac{18}{5}) = \frac{3}{2}\sqrt{3.6} - \sqrt{1.6} = \sqrt{2.5} \approx 1.581$，低於 $\mathrm{f}(2) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2.121$。

- 隨機選取 200 組 (a,b)，在細密的格點上對 f 作數值掃描，結果證實極小值 $\sqrt{b(a^2-1)}$ 出現在 x_0 處；而數算曲線與 $y = c$ 的交點，在 c^2 的三個範圍內分別得到 0、2 和 1 個解。
- 在 (i) 中，二重根與 c^2 恰好等於 $b(a^2-1)$ 這一點吻合；在 (ii) 中，$c^2 = 25$ 嚴格介乎 24 與 27 之間，而我們確實找到了兩個根。

常見錯誤

- 把 $c^2 = a^2 b$ 歸入「一個解」的情況：$x = b$ 在定義域內，所以要計算在內。
- 平方之後沒有驗算。這裏兩個根都保留下來，但你必須逐一檢驗 $3\sqrt{x} - 5 \geq 0$ 和 $x \geq 3$。
- 忘記了正是 $a > 1$ 才令 $\mathrm{f} \to \infty$；假如 $a \leq 1$，便不會有極小值，整個圖像會完全不同。

STEP 之外

這個數算解的個數的論證，建基於分析學（analysis）的兩個事實：區間上的連續函數會取遍兩端函數值之間的每一個值（介值定理，intermediate value theorem）；而嚴格單調函數對每個值最多取一次。兩者合起來，便把一幅草圖變成一個證明。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對這兩點都有細緻的闡述，並說明為何連續性恰恰就是所需的假設。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。