詳細解答

STEP III 2002，第 2 題

純數學 • 反正切級數

STEP III 2002，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s3-q2

關鍵思路

第一個結果其實是喬裝了的正切加法公式（tangent addition formula）。真正要下工夫的，只是驗證等式兩邊的角都落在同一個區間內，而 tan 在該區間上是一對一（one-to-one）的。有了這條公式，歸納法（induction）那一步只需套用它一次，再做一些因式分解（factorising）。至於最後一個和，竅門在於留意到 $r^2 - r + 1$ 不過是把 $r^2 + r + 1$ 中的 r 平移一位。因此新的級數（series）就是原來的級數，在前面多加一項而已。

解答

加法公式

設 $A = \arctan a$ 及 $B = \arctan b$。則 $\tan A = a$ 及 $\tan B = b$，並且

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{a + b}{1 - ab},$$

由於 $ab < 1$，此式有意義。這說明 $A + B$ 與 $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ 的正切值相同。但單憑這一點並不足以令兩者相等，因為 tan 每隔 π 便重複一次。所以我們需要兩個角都落在同一個區間內，而 tan 在該區間上是一對一的。

? **想一想** 為甚麼得到 $\tan(A + B) = \frac{a+b}{1-ab}$ 之後，證明還未完結？

證明還未完結，是因為 arctan 只會取 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 內的值。我們必須驗證 $A + B$ 也落在這個區間內。

- 由於 $0 < a < 1$，而 arctan 是遞增函數，故 $0 < A < \frac{\pi}{4}$。同理 $0 < B < \frac{\pi}{4}$，所以 $0 < A + B < \frac{\pi}{2}$。

► 由於 $a+b>0$ 及 $1-ab>0$，分數 $\frac{a+b}{1-ab}$ 為正數。所以它的 arctan 也落在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 內。

函數 tan 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上嚴格遞增（strictly increasing），因而是一對一的。所以該區間內正切值相同的兩個角必定相等，由此得

$$\arctan a+\arctan b=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right). \qquad \checkmark$$

歸納法

記 $S_n=\sum_{r=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right)$。要證明的是 $S_n=\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$。

基礎情況（*base case*）。當 $n=1$ 時，兩邊均為 $\arctan\frac{1}{3}$。

歸納步驟（*inductive step*）。假設對某個 $n\geq 1$，有 $S_n=\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$。下一項中有

$$(n+1)^2+(n+1)+1=n^2+3n+3,$$

所以

$$S_{n+1}=\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right).$$

兩個自變量都嚴格介乎 0 與 1 之間，所以加法公式適用，其中 $a=\frac{n}{n+2}$ 及 $b=\frac{1}{n^2+3n+3}$。把 $\frac{a+b}{1-ab}$ 的分子和分母同乘以 $(n+2)(n^2+3n+3)$，得

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{1-ab}&=\frac{n(n^2+3n+3)+(n+2)}{(n+2)(n^2+3n+3)-n}\\&=\frac{n^3+3n^2+4n+2}{n^3+5n^2+8n+6}.\end{aligned}$$

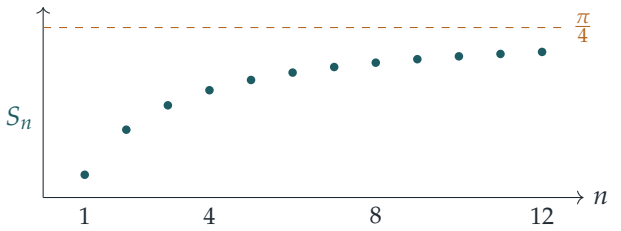
兩個三次式都在某個負整數處取值為零：分子在 $n=-1$，分母在 $n=-3$。因式分解後，

$$\frac{a+b}{1-ab}=\frac{(n+1)(n^2+2n+2)}{(n+3)(n^2+2n+2)}=\frac{n+1}{n+3},$$

這裏可以約去公因式，是因為 $n^2+2n+2=(n+1)^2+1>0$。因此 $S_{n+1}=\arctan\left(\frac{n+1}{(n+1)+2}\right)$，這正是 $n+1$ 時的命題。根據歸納法，結果對所有 $n\geq 1$ 成立。✓

無窮和。當 $n\to\infty$ 時，$\frac{n}{n+2}\to 1$。由於 arctan 是連續（continuous）的，

$$\sum_{r=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$



最後的和

設 $s = r - 1$。則

$$r^2 - r + 1 = (s+1)^2 - (s+1) + 1 = s^2 + s + 1.$$

當 r 取遍 $1, 2, 3, \ldots$ 時，s 取遍 $0, 1, 2, \ldots$。$s = 0$ 的一項是 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，而其餘各項（$s \geq 1$）恰好組成我們剛剛求和的級數。因此

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2 - r + 1}\right) = \arctan 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{s^2 + s + 1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \qquad \checkmark$$

第二個級數收斂（converge），是因為第一個級數收斂，所以把首項分拆出來是合理的。

驗算

- 當 $n = 2$ 時：$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$ 的正切值為 $\frac{10/21}{20/21} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$，與公式所預測的一致。
- 數值上，$S_{2000} \approx 0.784898$，而 $\arctan\frac{2000}{2002}$ 與之相差不超過 10^{-12}，另外 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$。
- 把第二個級數求和至 $r = 10^6$，得 $1.5707953\ldots$，與 $\frac{\pi}{2}$ 相差不超過 10^{-6}。這與取 n 項後的差距 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{n-1}{n+1} = \arctan\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$ 吻合。

常見錯誤

- 寫到「兩邊的 tan 相等」便停筆。缺少關於取值範圍的論證，證明並不完整。（例如當 $a = b = 2$ 時公式不成立：左邊是正數，但 $\arctan(-\frac{4}{3})$ 是負數。）
- 在歸納步驟中使用公式之前，忘記驗證兩個自變量都落在 $(0, 1)$ 內。
- 把最後的和又寫成 $\frac{\pi}{4}$。平移 $r \mapsto r - 1$ 會在前面多加一項 $\arctan 1$。

STEP 之外

歸納法那部分還有一條更巧妙的路徑。由於 $\frac{1}{r^2+r+1} = \frac{(r+1)-r}{1+r(r+1)}$，每一項都等於 $\arctan(r+1) - \arctan r$。於是這個和可以裂項相消（telescope），得 $\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$，再由減法公式可知它等於 $\arctan\frac{n}{n+2}$。看出裂項相消的結構，以及利用連續性來論證部分和（partial sum）的極限，都是大學第一門分析（analysis）課程中的日常工具。Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）細緻地討論了級數與連續性，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）則有更多這類 STEP 風格的練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。