詳細解答

STEP III 2002，第 13 題

概率與統計 • 指數分佈變量的最小值

STEP III 2002，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s3-q13

關鍵思路

「至少有一個小於 x」是「兩個都不小於 x」的補事件（complement），而後者的概率可憑獨立性（independence）分解成乘積。指數分佈（exponential distribution）的尾概率非常簡單，$\mathrm{P}(X_i \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}$，所以乘積仍然是一個指數尾概率，而關於最小值的證明就僅此而已。巴士一問則是直接應用：等候下一班巴士的時間，就是兩個指數間隔之中較小的一個。

解答

其中一個或兩個都小於 x 的概率

先求單一指數變量的尾概率。對於 $x \geq 0$，

$$\mathrm{P}(X_i \geq x) = \int_x^\infty \lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\right]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}.$$

設 E 為 $X_1 < x$ 或 $X_2 < x$（或兩者皆是）這個事件。它的補事件是 $X_1 \geq x$ 與 $X_2 \geq x$ 同時成立。由於 X_1 與 X_2 獨立，

$$\mathrm{P}(X_1 \geq x \text{ 且 } X_2 \geq x) = \mathrm{P}(X_1 \geq x)\,\mathrm{P}(X_2 \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x},$$

所以，對於 $x \geq 0$，

$$\boxed{\mathrm{P}(E) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}.}$$

（對於 $x < 0$，這個概率是 0，因為兩個變量都不可能取負值。）

? **想一想** 為甚麼不直接把 $\mathrm{P}(X_1 < x)$ 與 $\mathrm{P}(X_2 < x)$ 相加？

因為這兩個事件有重疊：兩個變量可以同時小於 x，相加便會把這種情況計算兩次。你也可以用容斥原理（inclusion–exclusion）來做，$(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})+(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})-(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})$，化簡後得到相同的答案，但用補事件會快捷得多。

最小值服從指數分佈

設 $X=\min(X_1,X_2)$。兩個數中較小的一個小於 x，當且僅當其中至少有一個小於 x，所以 $\{X<x\}$ 就是上面的事件 E。因此 X 的分佈函數（distribution function）是

$$F(x)=\mathrm{P}(X\le x)=1-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\qquad (x\ge 0),$$

而當 $x<0$ 時 $F(x)=0$。（對於連續變量，$\mathrm{P}(X<x)=\mathrm{P}(X\le x)$。）求導後，$X$ 的密度函數（density）是

$$f(x)=F'(x)=(\lambda_1+\lambda_2)\,\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\qquad (0\le x<\infty),$$

這正是參數為 $\lambda_1+\lambda_2$ 的指數密度函數。所以 X 服從指數分佈，這正是所要證明的。

巴士

參數為 λ 的指數分佈，其平均值為 $\int_0^\infty t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=1/\lambda$（用分部積分法）。以分鐘為時間單位，平均間隔 15 分鐘和 30 分鐘所對應的參數是

$$\lambda_A=\tfrac{1}{15},\qquad \lambda_B=\tfrac{1}{30}.$$

兩條路線各有一班巴士剛剛開出，所以距離下一班 A 線巴士的時間，就是 A 線巴士之間一個完整的間隔 T_A，B 線同理為 T_B。兩者互相獨立，分別服從參數為 λ_A 和 λ_B 的指數分佈。兩條路線都可以送我到學院，所以我的等候時間是 $W=\min(T_A,T_B)$，而根據剛才證明的結果，W 服從指數分佈，參數為

$$\lambda_A+\lambda_B=\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{30}=\tfrac{1}{10}.$$

中位數（median）m 滿足 $\mathrm{P}(W\le m)=\frac{1}{2}$：

$$1-\mathrm{e}^{-m/10}=\tfrac{1}{2}\iff \mathrm{e}^{-m/10}=\tfrac{1}{2}\iff m=10\ln 2.$$

由於 $\ln 2\approx 0.693$，等候時間的中位數是 $m\approx 6.93$ 分鐘，即大約 7 分鐘，與題目要求相符。

驗算

- 若 $\lambda_2\to 0$（B 線巴士幾乎永遠不來），答案變成 $1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}$，正好是 X_1 的分佈，合乎預期。

- 平均等候時間是 10 分鐘，比兩條路線各自的平均值 15 或 30 分鐘都要短；而中位數 $10\ln 2$ 低於平均值，這是右偏分佈（right-skewed distribution）的常見現象。
- 模擬 2×10^5 對平均值分別為 15 和 30 的獨立指數間隔，所得最小值的中位數約為 6.91 分鐘，而 $10\ln 2 = 6.931\ldots$。

常見錯誤

- 把平均值當作參數：平均值為 15 的指數分佈，其 $\lambda = \frac{1}{15}$，而不是 15。
- 把兩個概率相加，即 $\mathrm{P}(X_1 < x) + \mathrm{P}(X_2 < x)$，這樣會重複計算，而且結果可能超過 1。
- 取兩條路線中位數的平均，或只取 A 線的中位數（$15\ln 2 \approx 10.4$）：有兩條路線可選，等候時間會縮短。

STEP 之外

巴士之間的間隔服從指數分佈，意味着巴士的到達構成一個泊松過程（Poisson process），而這裏的結果說明：把兩個獨立的泊松過程合併，會得到另一個泊松過程，其速率是兩個速率之和。這個結果連同無記憶性（memoryless property）$\mathrm{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathrm{P}(X > t)$，是排隊論（queueing theory）和連續時間馬可夫鏈（continuous-time Markov chains）的基礎，在大學一年級的概率課程中便會學到。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）涵蓋了指數變量和泊松過程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。