詳細解答

STEP III 2002，第 11 題

力學 • 與牆壁的斜碰撞

STEP III 2002，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s3-q11

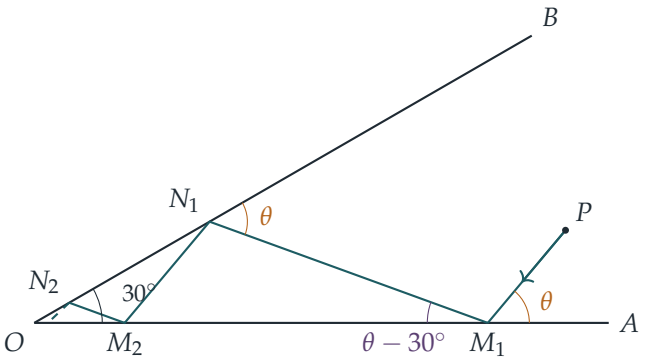
本題在 *Beyond STEP* 第 10.5 節有限時間內的無限次反彈中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/zeno-wedge.html

關鍵思路

在光滑（smooth）的牆上，衝量（impulse）垂直於牆。因此沿牆方向的速度分量保持不變，只有垂直方向的分量乘以 e。把這一點與三角形 OM_1N_1 的各個角結合起來，第一部分便化為一條三角方程。至於第二部分，每次反彈之後，運動都會以較小的規模重演一次。各段路程愈來愈短，但質點（particle）同時也在減慢，所以我們要相加的是時間，而不是距離。這個和是一個等比級數（geometric series）。

解答

我們把質點視為在光滑水平面上運動的一點，因此在兩次碰撞之間，它以恆定速率沿直線運動。兩面牆都是光滑的，而每次碰撞都遵從牛頓實驗定律（Newton's experimental law），其系數為 e。



求 e 及 v_1/u_1

由於角 $PM_1A = \theta$，質點到達 M_1 時正朝着 O 運動，與牆成角 θ。碰撞前的一刻，它的速度分量為

$$u_1\cos\theta \text{ 沿牆方向（朝向 } O\text{）}, \qquad u_1\sin\theta \text{ 垂直於牆（指向牆內）}.$$

牆是光滑的，所以質點所受的衝量垂直於 OA。因此：

$$\begin{aligned} &\text{沿牆方向：} u_1\cos\theta \text{（不變）}, \\ &\text{垂直方向：} e\,u_1\sin\theta \text{（方向逆轉，並乘以 } e\text{）}. \end{aligned}$$

所以質點離開 M_1 時仍然朝着 O 運動，與牆成角 φ，其中

$$\tan\varphi = \frac{e\,u_1\sin\theta}{u_1\cos\theta} = e\tan\theta, \qquad v_1\cos\varphi = u_1\cos\theta. \tag{$*$}$$

接着我們利用三角形 OM_1N_1 的幾何關係求 φ。O、N_1、B 三點共線，而角 $M_1N_1B = \theta$，所以角 $ON_1M_1 = 180° - \theta$。位於 O 的角是 $30°$，故

$$\varphi = \angle OM_1N_1 = 180° - 30° - (180° - \theta) = \theta - 30°.$$

要 φ 為正，必須有 $\theta > 30°$，這是本題的佈局所隱含的假設。於是由 $(*)$ 得

$$\boxed{e = \frac{\tan(\theta - 30°)}{\tan\theta}}$$

以及

$$\boxed{\frac{v_1}{u_1} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30°)} = \frac{2}{\sqrt{3} + \tan\theta}},$$

其中最後一個形式來自展開 $\cos(\theta - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$。你也可以寫成 $e = \dfrac{\sqrt{3}\tan\theta - 1}{\tan\theta\,(\sqrt{3} + \tan\theta)}$。由於 $0 < \theta - 30° < \theta < 90°$，我們得到 $0 < e < 1$，符合題目的要求。

在有限時間內到達 O

質點到達 N_1 時正朝着 O 運動，與牆 OB 成角 θ（因為角 $M_1N_1B = \theta$）。這與在 M_1 的情況完全相同，只是兩面牆的角色互換了。所以同樣的計算仍然適用：它反彈後與 N_1O 成角 $\theta - 30°$，而速率則乘以

$$r = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30°)}.$$

想一想 質點到達 M_2 時是否又再成角 θ，使這個規律真的重複下去？

是的。在三角形 ON_1M_2 中，位於 O 的角是 $30°$，位於 N_1 的角是 $\theta - 30°$。所以角 $OM_2N_1 = 180° - \theta$，即角 $N_1M_2A = \theta$。由歸納法（induction）可知，每次碰撞都是與牆成角 θ 發生的。每一段路程都以角 $\theta - 30°$ 離開牆。而每個三角形 OM_nN_n、ON_nM_{n+1} 的三個角都是 $30°$、$\theta - 30°$、$180° - \theta$，所以它們全部相似（similar）。

長度。在三角形 OM_1N_1 中應用正弦定理（sine rule），

$$\frac{ON_1}{\sin(\theta - 30°)} = \frac{OM_1}{\sin(180° - \theta)} = \frac{M_1N_1}{\sin 30°}.$$

所以每個新三角形都是前一個三角形按以下比例縮放而成：

$$k = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\sin(\theta - 30°)}{\sin\theta}.$$

把各段路程 M_1N_1, N_1M_2, $M_2N_2, \ldots$ 稱為第 $1, 2, 3, \ldots$ 段。第 n 段的長度為 $\ell_1 k^{n-1}$，其中 $\ell_1 = M_1N_1 = \dfrac{OM_1}{2\sin\theta}$。

速率。質點以恆定速率 $v_1 r^{n-1}$ 走過第 n 段。

時間。因此第 n 段所需的時間為

$$\tau_n = \frac{\ell_1 k^{n-1}}{v_1 r^{n-1}} = \frac{\ell_1}{v_1} q^{n-1}, \qquad q = \frac{k}{r} = \frac{\sin(\theta - 30°)\cos(\theta - 30°)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta - 60°)}{\sin 2\theta}.$$

想一想 各段路程按等比縮短，但質點同時也在減慢。為甚麼單憑這一點還不足以下結論？

我們要相加的是時間，而時間之比 q 所比較的，正是路程的縮短（k）與質點的減慢（r）。我們需要 $q < 1$。現在假設 $30° < \theta < 60°$。那麼

$$0° < 2\theta - 60° < 60° \;\Rightarrow\; \sin(2\theta - 60°) < \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 60° < 2\theta < 120° \;\Rightarrow\; \sin 2\theta > \tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $0 < q < 1$。於是總時間是一個收斂（convergent）的等比級數：

$$T = \frac{PM_1}{u_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_1}{v_1} q^{n-1} = \frac{PM_1}{u_1} + \frac{\ell_1}{v_1(1-q)}.$$

這是有限的。要化簡，可利用 $\sin 2\theta - \sin(2\theta - 60^\circ) = 2\cos(2\theta - 30^\circ)\sin 30^\circ$，由此得 $1 - q = \dfrac{\cos(2\theta - 30^\circ)}{\sin 2\theta}$。於是由 M_1 起計的時間為

$$\frac{\ell_1}{v_1(1-q)} = \frac{OM_1\cos(\theta - 30^\circ)}{u_1\cos(2\theta - 30^\circ)},$$

當 $30^\circ < \theta < 60^\circ$ 時，它是正數而且有限。

最後，質點確實會到達 O。第 n 次碰撞之後，它與 O 的距離是 $OM_1k^n \to 0$，因為 $0 < k < 1$。在走每一段路程期間，它與 O 的距離不會超過該段兩個端點的距離中較大的一個。所以當 $t \to T$ 時，質點與 O 的距離趨向 0：它經過無限多次碰撞之後，在有限時間 T 到達 O。 ■

驗算

- 當 $\theta = 45^\circ$：$e = \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$，$v_1/u_1 = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$，而 $q = \sin 30^\circ / \sin 90^\circ = \frac{1}{2}$，所以每一段所需的時間都是前一段的一半。取 $OM_1 = u_1 = 1$，由 M_1 到 O 的時間是 $\cos 15^\circ / \cos 60^\circ = 2\cos 15^\circ \approx 1.932$。逐次模擬各次碰撞（六十次反彈）得到 1.931852，兩者吻合。
- 當 $\theta = 60^\circ$：$q = 1$，所以每一段所需的時間都相同，總時間是無限的。當 $\theta > 60^\circ$ 時，$q > 1$。所以 60° 正好是分界線，而 T 的公式在該處因 $\cos(2\theta - 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$ 而趨向無限大。
- 當 $\theta \to 30^{\circ+}$ 時，$e \to 0$：質點幾乎不反彈，差不多筆直地滑向 O，正如你所預期的。

常見錯誤

- 把三角形弄錯：角 M_1N_1B 是位於 N_1 的外角（exterior angle），所以內角是 $180^\circ - \theta$，而在 M_1 的反彈角是 $\theta - 30^\circ$，不是 $\theta + 30^\circ$。
- 只因為距離 $OM_n \to 0$ 便斷言質點到達 O。無限多段路程需要一個收斂的時間級數，而質點在每次碰撞時都會減慢。
- 在碰撞時把切向分量（tangential component）逆轉。在光滑的牆上，只有法向分量（normal component）會改變。

STEP 之外

在有限時間內發生無限多次碰撞，稱為芝諾現象（Zeno behaviour）。大家熟悉的例子是一個以 $e < 1$ 在地板上彈跳的球，而這裏的楔形就扮演了地板的角色。研究「混合」系

統（hybrid systems，即把平滑運動與突然跳變混合起來的系統）的數學家，必須決定在芝諾時間之後會發生甚麼事。在顆粒物料中，同樣的效應稱為非彈性坍縮（inelastic collapse），會在模擬中造成實際的麻煩。若想看以大學一年級程度仔細處理碰撞與衝量的論述，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。