詳細解答

STEP III 2002，第 10 題

力學 • 涉及摩擦力的轉動

STEP III 2002，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s3-q10

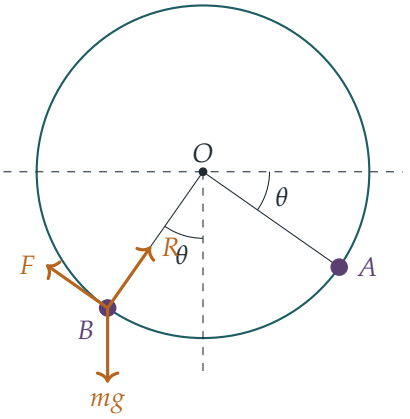
關鍵思路

只要第二個質點（particle）不滑動，它便隨圓柱一起運動，於是整個系統是一個繞固定軸轉動的剛體（rigid body）：兩個相等的質量位於半徑 a 處，彼此相隔四分之一圈。這樣，用能量（或對轉軸取力矩（moments））一行便可得出運動方程。要找出何時開始滑動，我們單獨考慮那個沒有固定的質點，沿表面方向和垂直於表面方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），求出它所需的摩擦力（friction）F 和法向反作用力（normal reaction）R。當 F 首次達到 μR 時，它便開始滑動。

解答

建立模型

把兩個質點都視為輕圓柱上的點質量，輪軸光滑。設 O 為轉軸，A 為固定的質點，B 為沒有固定的質點。系統由靜止釋放後，A 下落，圓柱因而轉動（在圖中為順時針方向），並把 B 帶上遠離 A 的一側。轉過角度 θ 後，OA 在水平線以下成角 θ，而 OB 在另一側與向下的鉛垂線成角 θ。



運動方程

只要 B 不滑動，兩個質點都在半徑為 a 的圓上以角速率（angular speed）$\dot{\theta}$ 運動，而圓柱本身沒有質量。取 O 所在的水平面為勢能（potential energy）零點，則 A 的高度為 $-a\sin\theta$，B 的高度為 $-a\cos\theta$。系統在 $\theta = 0$ 時由靜止開始運動，光滑輪軸不作功，而 B 與圓柱之間沒有相對運動，所以摩擦力所作的淨功為零。因此能量守恆：

$$2 \cdot \tfrac{1}{2} ma^2\dot{\theta}^2 - mga\sin\theta - mga\cos\theta = -mga,$$

即

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a}(\sin\theta + \cos\theta - 1). \qquad (*)$$

對時間求導，再除以 $2\dot{\theta}$（運動一旦開始，它便不等於零），得

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2a}(\cos\theta - \sin\theta),$$

這正是所要求的結果。另一個等價的做法是對 O 取力矩：A 的重量沿轉動方向的力矩為 $mga\cos\theta$，B 的重量逆轉動方向的力矩為 $mga\sin\theta$，而轉動慣量（moment of inertia）為 $2ma^2$。

B 何時滑動？

現在單獨考慮 B。作用於它的力有：重量 mg、指向 O 的法向反作用力 R，以及沿表面的摩擦力 F；我們取摩擦力沿 B 的運動方向（即沿側面向上）為正。B 在半徑為 a 的圓上運動，所以它有指向 O 的加速度 $a\dot{\theta}^2$ 和沿運動方向的加速度 $a\ddot{\theta}$。重量有一個大小為 $mg\cos\theta$、方向正背離 O 的分量，以及一個大小為 $mg\sin\theta$、與運動方向相反的分量。因此

$$\text{指向}O: \quad R - mg\cos\theta = ma\dot{\theta}^2,$$
$$\text{沿運動方向}: \quad F - mg\sin\theta = ma\ddot{\theta}.$$

利用 $(*)$ 和運動方程，

$$R = mg\cos\theta + mg(\sin\theta + \cos\theta - 1) = mg\,(2\cos\theta + \sin\theta - 1),$$
$$F = mg\sin\theta + \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg\,(\sin\theta + \cos\theta).$$

當 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ 時，兩者皆為正。（$R > 0$ 是因為當 $0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$ 時，利用 $2\cos\theta \ge 1$ 可得 $2\cos\theta + \sin\theta - 1 \ge \sin\theta > 0$，而在 $\theta = 0$ 時 $R = mg$。）所以 B 保持接觸，而摩擦力把它沿側面向上推。只要 $F \le \mu R$，質點便不會滑動，也就是說，只要

$$\rho(\theta) = \frac{F}{R} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2(2\cos\theta + \sin\theta - 1)} \le \mu.$$

在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時，$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 而 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，於是

$$\rho\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \mu.$$

想一想 為甚麼質點不可能在此之前已經開始滑動？

我們需要對所有 $0 \le \theta < \frac{\pi}{3}$ 都有 $\rho(\theta) < \mu$。記 $N = \sin\theta + \cos\theta$ 和 $D = 2\cos\theta + \sin\theta - 1$。則

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (\cos\theta - \sin\theta)(2\cos\theta + \sin\theta - 1) - (\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta - 2\sin\theta) \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta - \cos\theta = 1 + \sin\theta - \cos\theta, \end{aligned}$$

它在 $0 < \theta < \pi$ 時為正。由於在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上 $D > 0$，故在該區間上 $\rho' = (N'D - ND')/(2D^2) > 0$，所以 ρ 由 $\rho(0) = \frac{1}{2}$ 起嚴格遞增。因此它一直小於 μ，直至在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時恰好達到 μ。此外，由 $(*)$ 可知，當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時 $\dot\theta^2 > 0$，所以圓柱確實會一直轉動並到達這個角度。

所以，當圓柱轉過 $60°$ 時，第二個質點開始滑動，這正是所要求的結果。

驗算

- 在 $\theta = 0$ 時：B 靜止於最低點，但 $F = \frac{1}{2}mg \ne 0$。這是對的：A 的重量正試圖轉動圓柱，而摩擦力必須令 B 隨之加速。事實上，此時 $F = ma\ddot\theta = \frac{1}{2}mg$，而 $R = mg$，因為 B 還未有速率。
- 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時，$\ddot\theta = 0$，角速率達到最大值；兩個重量對 O 的力矩互相平衡時，正應如此。
- 以數值方法驗證：對運動方程作數值積分，並直接由 B 的加速度計算作用於它的接觸力，所得結果與 R 和 F 的公式吻合，而 F/R 首次達到 $(3+\sqrt{3})/6 \approx 0.7887$ 是在 $60.00°$。

常見錯誤

- 把圓柱的轉動慣量也計算在內：圓柱是輕的，所以只有兩個質點貢獻 $2ma^2$。
- 忘記了 B 的切向加速度（tangential acceleration）$a\ddot{\theta}$，這會得出 $F = mg\sin\theta$ 和錯誤的角度。
- 只驗證在 60° 時 $F = \mu R$，卻沒有證明在此之前 F/R 較小。

STEP 之外

這是一個單自由度（one-degree-of-freedom）系統：一旦加上約束（constraint）條件（不滑動），單一個坐標 θ 便足以描述一切，而能量可直接給出運動。約束力是事後才求出的，而當約束所需的力超過表面所能提供的力時，約束便會失效。這與質點離開球面的問題是同一套邏輯，而在拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中，這套方法藉拉格朗日乘數（Lagrange multipliers）而變得有系統。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種精神闡述剛體轉動和約束力。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。