詳細解答

STEP III 2002，第 1 題

純數學 • 廣義積分與體積

STEP III 2002，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

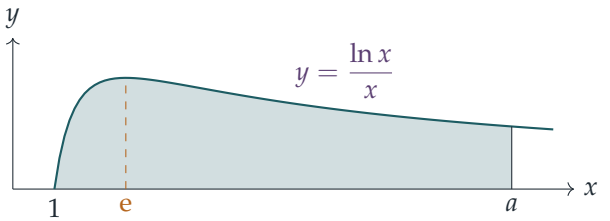
step.maths.org/questions/02-s3-q1

關鍵思路

只要留意到 $\frac{1}{x}$ 是 $\ln x$ 的導數（derivative），兩個積分都變得容易。面積的被積函數（integrand）是「一個函數乘以它自己的導數」，所以一眼就能積出來。體積的被積函數 $(\ln x)^2/x^2$ 多出了一個 x 的冪，因此我們要用兩次分部積分法（integration by parts），每次都對對數的冪求導，把它的次數降低；這裏所說的對數就是 $\ln x$。有趣之處在於兩個極限（limit）的對比：曲線衰減得剛好夠慢，令面積無止境地增長；但把它平方之後，衰減就夠快，令體積穩定下來。

解答

當 $x \geq 1$ 時，$\ln x \geq 0$，所以曲線位於 x 軸上或其上方，面積就是該積分本身。曲線由 $(1,0)$ 出發，上升至 $x = \mathrm{e}$ 處的極大值（該處 $y' = (1 - \ln x)/x^2 = 0$），然後緩緩地向橫軸衰減。



面積

由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right) = \dfrac{\ln x}{x}$，

$$A(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^a = \tfrac{1}{2}(\ln a)^2,$$

因為 $\ln 1 = 0$。（等價的做法是用代換法（substitution）：設 $u = \ln x$，$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$，便得到 $\int_0^{\ln a} u\,\mathrm{d}u$。）

當 $a \to \infty$ 時，$\ln a \to \infty$，所以 $A(a) \to \infty$：面積是無界的，儘管它增長得非常緩慢。

體積

繞 x 軸旋轉，所得的體積為 $V(a) = \pi\displaystyle\int_1^a y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^a \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$。

用分部積分法，取 $u = (\ln x)^2$ 及 $\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$，於是 $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ 及 $v = -\frac{1}{x}$：

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

再做一次同樣的步驟，取 $u = \ln x$，$\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$：

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

把兩者合併，

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2 + 2\ln x + 2}{x} + C.$$

在 $x = 1$ 處，括號內的值是 $0 + 0 + 2$，所以下限的貢獻是 $-(-2) = +2$，於是

$$V(a) = \pi\left(2 - \frac{(\ln a)^2 + 2\ln a + 2}{a}\right).$$

想一想 $(\ln a)^2/a$ 的分子和分母都趨向無窮大，我們怎樣知道它趨向 0？

對數的增長比任何正數次冪都要慢。要把這句話說得嚴謹，可由以下事實出發：對所有 $t > 0$ 都有 $\ln t < t$（直線 $y = t$ 位於 $y = \ln t$ 的上方；兩者的差距 $t - \ln t$ 在 $t = 1$ 處取得最小值 1）。代入 $t = a^{1/4}$：則 $\frac{1}{4}\ln a < a^{1/4}$，即 $\ln a < 4a^{1/4}$。所以當 $a > 1$ 時，

$$0 < \frac{(\ln a)^2}{a} < \frac{16\,a^{1/2}}{a} = \frac{16}{\sqrt{a}} \to 0, \qquad 0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{4}{a^{3/4}} \to 0,$$

而 $2/a \to 0$ 自然不在話下。因此 $V(a)$ 中的分式趨向 0，而

$$V(a) \to 2\pi \quad \text{當} a \to \infty.$$

由於被積函數為正，$V(a)$ 隨 a 遞增，所以體積穩步上升並趨近 2π，但永遠不會達到這個值：即使被旋轉的區域面積無限，所得的立體卻只有有限的體積。

驗算

- 在 $a = 1$ 時，兩條公式都給出 0，這是必然的：$A(1) = 0$ 及 $V(1) = \pi(2 - 2) = 0$。
- 對 $-\big((\ln x)^2 + 2\ln x + 2\big)/x$ 求導，可還原出 $(\ln x)^2/x^2$（$2\ln x$ 和 2 這兩項與括號的導數互相抵消）。
- 數值上，對 $\pi \int_1^{10} (\ln x)^2/x^2 \, \mathrm{d}x$ 使用辛普森法則（Simpson's rule）得出 2.54247，與公式吻合；而設 $x = \mathrm{e}^t$ 後，無限延伸時的體積是 $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$，其數值計算結果為 $6.283185\ldots = 2\pi$。

常見錯誤

- 忘記下限：$\ln 1 = 0$ 令大部分的項在 $x = 1$ 處消失，但常數項 $-2/x$ 卻不會消失，而整個極限值 2π 正是由它提供的。
- 毫無理由地斷言 $(\ln a)^2/a \to 0$。只需寫一行比較，例如 $\ln a < 4a^{1/4}$，便已足夠。

STEP 之外

這是「加百列號角」(Gabriel's horn，即把 $y = 1/x$ 旋轉而成) 的近親，後者是一個體積有限但表面積無限的立體：而在這裏，連平面區域本身的面積也是無限的。代換 $x = \mathrm{e}^t$ 把體積化為 $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \pi\,\Gamma(3) = 2!\,\pi$，讓我們初次窺見伽瑪函數（gamma function），$\Gamma(n+1) = n!$。怎樣理解瑕積分（improper integral），以及「對數輸給冪」這類比較，是大學一年級分析學（analysis）的核心課題；Abbott 的 *Understanding Analysis* 是閱讀這方面內容的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。