詳細解答

STEP II 2002，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP II 2002，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

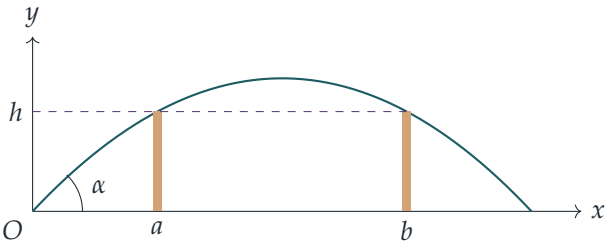
step.maths.org/questions/02-s2-q9

關鍵思路

先寫出軌跡（path）的方程，把 y 表示成 x 的函數。「剛好越過兩道牆」表示軌跡通過兩道牆的牆頂，所以方程 $y = h$ 的根恰好是 $x = a$ 和 $x = b$。這是一條已知兩根的二次方程（quadratic equation），把它與根之和及根之積（sum and product of roots）比較，便可一次過得出所有結果。至於第二部分，只需把兩條公式對 h 求導（differentiate）。

解答

我們把質點（particle）看成只受重力作用而運動的一點（不計空氣阻力（air resistance）），並取 O 為原點，x 軸水平，y 軸鉛垂向上。按圖中所示的情況，我們假設 $0 < a < b$、$h > 0$ 及 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$。



求 $\tan\alpha$ 和 V

初速度的分量為 $V\cos\alpha$ 和 $V\sin\alpha$，經過時間 t 後

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

利用 $t = x/(V\cos\alpha)$ 消去時間，得軌跡

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha - kx^2, \qquad \text{其中} k = \frac{g\sec^2\alpha}{2V^2} = \frac{g(1+\tan^2\alpha)}{2V^2} > 0.$$

質點剛好越過每道牆，所以軌跡通過牆頂 (a,h) 和 (b,h)。因此 a 和 b 是以下方程的根：

$$x\tan\alpha - kx^2 = h, \qquad \text{即} \qquad kx^2 - x\tan\alpha + h = 0.$$

這是 x 的二次方程（因為 $k \neq 0$），所以它最多有兩個根，故此它的根恰好就是 a 和 b。與根之和及根之積比較，

$$a + b = \frac{\tan\alpha}{k}, \qquad ab = \frac{h}{k}.$$

由第二式得 $k = h/(ab)$，再由第一式得

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{h(a+b)}{ab}.}$$

最後，由 k 的定義，

$$\begin{aligned}\frac{2V^2}{g} = \frac{1+\tan^2\alpha}{k} &= \frac{ab}{h}\left(1 + \frac{h^2(a+b)^2}{a^2b^2}\right)\\ &= \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2 h}{ab},\end{aligned}$$

這正是所求的結果。

（值得留意的是，代入這些值後，軌跡就是 $y = \dfrac{h}{ab}x(a+b-x)$，一眼可見它在 $x = a$ 和 $x = b$ 時等於 h。）

把牆加高

第二個質點同樣剛好越過兩道牆，牆與原點的距離仍是 a 和 b，但高度變為 $h + \delta h$。所以把 h, α, V 換成 $h + \delta h, \alpha + \delta\alpha, V + \delta V$ 後，上面的公式依然成立：

$$\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h, \qquad \frac{2V^2}{g} = \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2}{ab}h.$$

兩者都只是 h 的函數（a, b 固定），所以對於微小的變化，我們可以用 $\delta(\text{量}) \approx \dfrac{\mathrm{d}(\text{量})}{\mathrm{d}h}\delta h$。

角度。 把 $\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h$ 對 h 求導，得 $\sec^2\alpha\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}h} = \dfrac{a+b}{ab}$，所以

$$\sec^2\alpha\,\delta\alpha \approx \frac{a+b}{ab}\delta h.$$

由於 $\sec^2\alpha > 0$、$a, b > 0$ 及 $\delta h > 0$，右邊是正數，所以 $\delta\alpha > 0$：質點必須以更陡的角度拋出。

想一想 這個「≈」只是一階（first-order）近似。我們真的可以憑它斷定 $\delta\alpha$ 的正負號嗎？

可以，而且其實完全不需要取近似。$\tan\alpha$ 的公式對 h 是線性的，所以以下等式準確成立：$\tan(\alpha+\delta\alpha)-\tan\alpha=\frac{a+b}{ab}\,\delta h>0$。由於 tan 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上嚴格遞增（strictly increasing），這就迫使 $\alpha+\delta\alpha>\alpha$，所以 $\delta\alpha>0$。

速率。 把 $\dfrac{2V^2}{g}$ 對 h 求導，

$$\frac{4V}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}=-\frac{ab}{h^2}+\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(a+b)^2}{abh^2}\left(h^2-\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\right),$$

所以

$$\delta V\approx\frac{g(a+b)^2}{4Vabh^2}\left(h-\frac{ab}{a+b}\right)\left(h+\frac{ab}{a+b}\right)\delta h.$$

除了 $h-\frac{ab}{a+b}$ 之外，每個因子都是正數（因為 $V,a,b,h,\delta h>0$）。因此 δV 的正負號與 $h-\frac{ab}{a+b}$ 相同：若 $h>ab/(a+b)$ 則為正，若 $h<ab/(a+b)$ 則為負，這正是所求的結果。（由於這個導數在 $h=ab/(a+b)$ 以外都不等於零，只要 δh 足夠小，一階項確實決定了正負號。）

詮釋。 與 $\tan\alpha=h(a+b)/(ab)$ 比較，條件 $h>ab/(a+b)$ 正好就是 $\tan\alpha>1$，即 $\alpha>45°$。作為 h 的函數，$2V^2/g$ 具有 $p/h+qh$ 的形式，它在 $h=\sqrt{p/q}=ab/(a+b)$ 時最小，此時 $\alpha=45°$ 而 $2V^2/g=2(a+b)$。所以：如果拋射角本來已經比 45° 陡，把牆加高便需要更大的速率；如果拋射角較平，把牆加高（同時令拋射角變陡，趨近 45°）所需的速率反而更小。

驗算

- 取 $a=3\,\mathrm{m}$、$b=7\,\mathrm{m}$、$h=2.5\,\mathrm{m}$。那麼 $\tan\alpha=25/21$，而 $2V^2/g=8.4+11.90\ldots=20.30\ldots\,\mathrm{m}$。用這些數值以數值方法逐步計算質點的運動，質點在 $x=3$ 和 $x=7$ 兩處的高度都是 $2.5\,\mathrm{m}$（準確至 10^{-11}）。
- 對稱性：答案對 a 和 b 是對稱的，這是必然的，因為軌跡是一條以 $x=\frac{1}{2}(a+b)$ 為對稱軸的拋物線（parabola）。
- 單位：ab/h 和 $(a+b)^2h/(ab)$ 都是長度，與 $2V^2/g$ 相符；而 $\tan\alpha$ 是無量綱（dimensionless）的。
- 當 $h=ab/(a+b)$ 時，我們得到 $\alpha=45°$ 及 $2V^2/g=2(a+b)$；對於 $a=3$、$b=7$，這個值是 $20\,\mathrm{m}$，比上面的 $20.30\,\mathrm{m}$ 略小，與它是最小值相符。

常見錯誤

- 為兩道牆分別寫出兩條方程，然後硬解聯立方程：這樣做是可行的，但利用根之和與根之積，兩行便可完成。
- 把 k 換回 V 時，忘記了 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$。
- 沒有把 $2V^2/g$ 的導數因式分解（factorise）便直接說出 δV 的正負號：那個簡潔的條件是由 $h^2 > a^2b^2/(a+b)^2$ 和 $h > 0$ 得出的。

STEP 之外

第二部分是一個小型的靈敏度分析（sensitivity analysis）：我們把映射 $h \mapsto (\alpha, V)$ 在某個解的附近線性化，然後讀出輸出如何隨之變化。線性化（linearisation），以及與之相關的軌跡族包絡線（envelope）的概念（即「安全拋物線」（parabola of safety），它是以某一給定速率所能到達的所有位置的邊界），都是大學一年級力學和微積分課程的標準內容。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對拋體運動（projectile motion）和這些近似技巧都有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。