詳細解答

STEP II 2002，第 8 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP II 2002，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q8

關鍵思路

每一條方程都是最簡單的一階線性方程（first-order linear equation）$y' = p(x)\,y$，所以在任何一個 p 由單一公式給出的區間上，解都是一個常數乘以 $\exp(\int p\,\mathrm{d}x)$。難處在於問題在 $x = 0$ 處被分成兩段：兩邊各有一個任意常數（arbitrary constant），其中一邊的常數由 y 的已知值確定，另一邊的常數則只能靠要求兩段在 $x = 0$ 處相接來確定。第一部分正是這個想法的預演，而第二部分則暗藏了一個絕對值（absolute value）。

解答

第一對方程

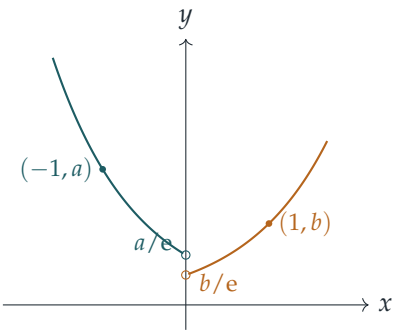
當 $x < 0$ 時，由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$ 得 $y = A\mathrm{e}^{-x}$，其中 A 為某個常數。（要看出沒有其他解，可留意 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{x}(y' + y) = 0$，所以 $y\mathrm{e}^{x}$ 在區間 $x < 0$ 上是常數。）由條件「在 $x = -1$ 處 $y = a$」得 $A\mathrm{e} = a$，所以

$$y = a\,\mathrm{e}^{-x-1} \qquad (x < 0).$$

同樣地，當 $x > 0$ 時有 $y = B\mathrm{e}^{x}$，而在 $x = 1$ 處 $y = b$ 給出 $B = b/\mathrm{e}$，所以

$$y = b\,\mathrm{e}^{x-1} \qquad (x > 0).$$

當 $x \to 0^{-}$ 時，$y \to a/\mathrm{e}$；當 $x \to 0^{+}$ 時，$y \to b/\mathrm{e}$。一般而言這兩個值並不相同，曲線在 y 軸處會出現跳躍。下圖所示為 $a, b > 0$ 且 $a > b$ 的典型情況：左邊是一條衰減的指數曲線，愈接近該軸愈低；右邊是一條增長的指數曲線；空心圓圈標示兩個（不同的）極限（limit）值。



曲線沒有跳躍，當且僅當兩個極限相等，即 $a/\mathrm{e} = b/\mathrm{e}$，也就是

$$a = b.$$

在這情況下，曲線為 $y = a\,\mathrm{e}^{|x|-1}$，是一條對稱、形狀像「V」的曲線，在 $x = 0$ 處有一個尖角。

含 $|\mathrm{e}^x - 1|$ 的方程

由於 $\mathrm{e}^x > 1$ 當且僅當 $x > 0$，

$$|\mathrm{e}^x - 1| = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^x, & x < 0. \end{cases}$$

所以這條方程和先前一樣，分成兩條普通的線性方程。

當 $x > 0$ 時： $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y \circ \mathrm{e}^x - 1$ 的一個原函數（antiderivative）是 $\mathrm{e}^x - x$，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^x - x)}\right) = 0$，於是

$$y = C\exp(\mathrm{e}^x - x).$$

在 $x = 1$ 處，$y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$，所以 $C\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$，得 $C = \mathrm{e}$。因此

$$y = \exp(\mathrm{e}^x - x + 1) \qquad (x \geq 0).$$

當 $x < 0$ 時： $y' = (1 - \mathrm{e}^x)y \circ 1 - \mathrm{e}^x$ 的一個原函數是 $x - \mathrm{e}^x$，所以

$$y = D\exp(x - \mathrm{e}^x).$$

? **想一想** 在 $x < 0$ 的範圍內沒有已知的數據點。那麼 D 由甚麼確定？

答案是在 $x = 0$ 處的連續性（continuity）。從右邊趨近時，$y \to \exp(1 - 0 + 1) = \mathrm{e}^2$。從左邊趨近時，$y \to D\exp(0 - 1) = D/\mathrm{e}$。令兩者相等，得 $D = \mathrm{e}^3$，所以

$$y = \exp(x - \mathrm{e}^x + 3) \qquad (x < 0).$$

把兩段合起來，

$$y = \begin{cases} \exp(\mathrm{e}^x - x + 1), & x \geq 0, \\ \exp(x - \mathrm{e}^x + 3), & x < 0. \end{cases}$$

留意這一次在 $x = 0$ 處連尖角也沒有：兩條公式都給出 $y'(0) = 0$，與 $|\mathrm{e}^0 - 1|\,y = 0$ 吻合。由於 $y > 0$ 且 $|\mathrm{e}^x - 1| \geq 0$，這個解處處遞增，並在 $x = 0$ 處有一個駐點拐點（stationary point of inflection），該處 $y = \mathrm{e}^2$。

極限

(i) 當 $x > 0$ 時，

$$y\exp(-\mathrm{e}^x) = \exp(\mathrm{e}^x - x + 1 - \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{1-x} \to 0 \quad \text{當} x \to +\infty.$$

所以極限是 0：因子 $\exp(-\mathrm{e}^x)$ 恰好把雙重指數增長完全抵消，只剩下衰減的 e^{1-x}。

(ii) 當 $x < 0$ 時，

$$y\,\mathrm{e}^{-x} = \exp(x - \mathrm{e}^x + 3 - x) = \exp(3 - \mathrm{e}^x) \to \mathrm{e}^3 \quad \text{當} x \to -\infty,$$

因為 $\mathrm{e}^x \to 0$。所以極限是 e^3。換句話說，當 x 是絕對值很大的負數時，這個解的表現就像 $\mathrm{e}^3\mathrm{e}^x$，正如所料：在那裏 $|\mathrm{e}^x - 1| \approx 1$，方程近乎 $y' = y$。

驗算

- 對答案求導：當 $x > 0$ 時，$y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$；當 $x < 0$ 時，$y' = (1 - \mathrm{e}^x)y$。在 $x = 1$ 處，$\exp(\mathrm{e} - 1 + 1) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$。
- 數值上，用龍格—庫塔法（Runge–Kutta method）由 $y(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \approx 15.154$ 逐步倒推至 $x = 0$，得 $y(0) \approx 7.38906 = \mathrm{e}^2$；繼續推算至 $x = -5$，結果與 $\exp(x - \mathrm{e}^x + 3)$ 吻合至六位有效數字（significant figures）。
- 就極限 (ii) 而言，在 $x = -10$ 處得 $y\mathrm{e}^{-x} \approx 20.0846$，接近 $\mathrm{e}^3 \approx 20.0855$；就 (i) 而言，在 $x = 10$ 處，$\mathrm{e}^{1-x} \approx 1.2 \times 10^{-4}$。

常見錯誤

- 用 $x = 1$ 處的條件去確定 $x = 0$ 兩邊的常數。兩個區間是各自獨立的問題，左邊的常數只能由連續性得出。
- 丟掉模（modulus）符號，對所有 x 求解 $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$；這樣在 $x < 0$ 時會得出錯誤的曲線，(ii) 的極限也會出錯。
- 寫出 $\int(\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x$ 之後，卻寫成 $\exp(\mathrm{e}^x - x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}/x$（正確的是 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^{-x}$）。

STEP 之外

方程 $y' = |e^x - 1|\, y$ 的係數在 $x = 0$ 處連續但不可微（differentiable）。關於 $y' = f(x, y)$ 的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem，即 Picard–Lindelöf 定理）只要求 f 對 x 連續、對 y 滿足利普希茨（Lipschitz）條件，所以在這裏單憑一個條件就能確定整條實數線上的解，而在 0 處的連續性是自動成立的。在第一部分，方程右邊本身在 $x = 0$ 處出現跳躍，所以才需要額外的條件把兩段接起來。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）討論了一階方程的這些存在性與唯一性問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。