詳細解答

STEP II 2002，第 7 題

純數學 • 直線的向量幾何

> **STEP II 2002，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q7

關鍵思路

這裏的一切都歸結為點積（dot product）。一條通過原點、單位方向向量為 $\mathbf{u}$ 的直線，與 m_1 的夾角為 $\pi/4$，當且僅當 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_1|\cos\frac{\pi}{4}$，於是第一部分就化為聯立方程。至於後半部分，「垂直」即點積等於零；而空間中兩條直線只有在共面（coplanar）且不平行時才會相交，共面則等價於純量三重積（scalar triple product）等於零。出人意表的是，共面的那個情況原來正是平行的情況。

解答

直線 m_3 和 m_4

設 $\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ 及 $\mathbf{d}_2 = \mathbf{i}+\mathbf{k}$，兩者的長度均為 $\sqrt{2}$。設 $\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ 為沿着一條通過 O 的直線的單位向量（unit vector）。兩條直線之間的夾角是指它們之間的銳角，所以條件是

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = \sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4} = 1, \qquad |\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_2| = 1,$$

即 $a+b = \pm 1$ 及 $a+c = \pm 1$。以 $-\mathbf{u}$ 取代 $\mathbf{u}$ 會得出同一條直線，並把兩個正負號同時反轉，所以只需考慮兩種情況。

同號：$a+b=1$，$a+c=1$。這時 $b=c=1-a$，而由 $a^2+b^2+c^2=1$ 得

$$a^2+2(1-a)^2 = 1 \iff 3a^2-4a+1=0 \iff (3a-1)(a-1)=0.$$

所以 $a=1$，得 $\mathbf{u}=\mathbf{i}$；或 $a=\frac{1}{3}$，得 $\mathbf{u}=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$。

異號：$a+b=1$，$a+c=-1$。這時 $b=1-a$，$c=-1-a$，而由 $a^2+(1-a)^2+(1+a)^2=1$ 得 $3a^2+2=1$，此方程沒有實數解。

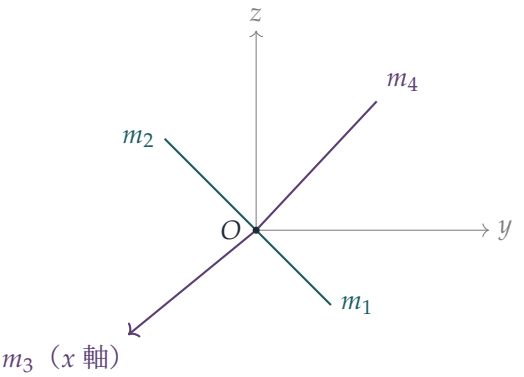
所以這兩條直線的方向為

$$m_3:\ \mathbf{i}, \qquad m_4:\ \mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

（兩個標記對調亦無不可）。取單位向量 $\mathbf{e}_3=\mathbf{i}$ 及 $\mathbf{e}_4=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$，則

$$\cos\theta=\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_4=\tfrac{1}{3},$$

此值為正數，所以這就是銳角：其餘弦為 $\frac{1}{3}$。



設定各點

由於 A 位於 m_1 上，且與 O 的距離為 $\lambda\sqrt{2}$，它就是 $\pm\lambda(1,1,0)$；坐標須為非負數，故我們必須取 $A=\lambda(1,1,0)$，其中 $\lambda\geq 0$（由於 $\lambda\sqrt{2}$ 是距離，我們可以全程取 $\lambda\geq 0$）。同樣地，$B=\lambda(1,0,1)$。在 m_3, m_4 上坐標為非負數的單位點是 $(1,0,0)$ 和 $\frac{1}{3}(1,2,2)$。

當中哪一點是 P、哪一點是 Q，取決於 m_3 和 m_4 的標記方式。但這並不要緊：反射 $(x,y,z)\mapsto(x,z,y)$ 把 A 和 B 對調，並保持 $(1,0,0)$ 和 $\frac{1}{3}(1,2,2)$ 兩點不變，所以它把這個構形的一種標記方式變為另一種（直線 AQ 和 BP 的角色互換）。反射保持垂直關係和相交關係，所以只需取

$$A=(\lambda,\lambda,0),\quad B=(\lambda,0,\lambda),\quad P=(1,0,0),\quad Q=(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}).$$

於是

$$\overrightarrow{AQ}=(\tfrac{1}{3}-\lambda,\ \tfrac{2}{3}-\lambda,\ \tfrac{2}{3}),\qquad \overrightarrow{BP}=(1-\lambda,\ 0,\ -\lambda).$$

第 (i) 部分

AQ 垂直於 BP，當且僅當 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=0$：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}&=(\tfrac{1}{3}-\lambda)(1-\lambda)+0-\tfrac{2}{3}\lambda\\&=\lambda^2-\tfrac{4}{3}\lambda+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda=\lambda^2-2\lambda+\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

當 $(\lambda-1)^2=\frac{2}{3}$ 時，上式等於零，即

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 1 \pm \tfrac{\sqrt{6}}{3}.$$

兩個值都是正數（因為 $\sqrt{6}<3$），所以兩者都符合非負條件，而這個二次方程再沒有其他根。因此恰好有兩個 λ 的值使得 $AQ \perp BP$，正如題目所求。

第 (ii) 部分

> **想一想** 怎樣判斷三維空間中的兩條直線是否相交？

兩條相異的直線相交，當且僅當它們位於同一平面上而且不平行。直線 AQ 和 BP 位於同一平面上，當且僅當 A、B、P、Q 四點共面，而這又當且僅當 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$ 的純量三重積等於零。

這裏 $\overrightarrow{AB}=(0,-\lambda,\lambda)$ 及 $\overrightarrow{AP}=(1-\lambda,-\lambda,0)$，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \lambda\cdot\tfrac{2}{3}(1-\lambda)+\lambda\Big[(1-\lambda)(\tfrac{2}{3}-\lambda)+\lambda(\tfrac{1}{3}-\lambda)\Big]$$

$$= \lambda\Big[\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda+\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{3}\lambda\Big] = 2\lambda(\tfrac{2}{3}-\lambda),$$

這是沿第一行展開的結果。因此，對於 $\lambda\neq 0$，兩條直線只有在 $\lambda=\frac{2}{3}$ 時才有可能相交。

可是當 $\lambda=\frac{2}{3}$ 時，

$$\overrightarrow{AQ}=(-\tfrac{1}{3},\,0,\,\tfrac{2}{3}), \qquad \overrightarrow{BP}=(\tfrac{1}{3},\,0,\,-\tfrac{2}{3})=-\overrightarrow{AQ},$$

所以兩條直線平行。它們並不是同一條直線，因為 $\overrightarrow{BA}=(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ 不是 $\overrightarrow{BP}$ 的倍數，所以 A 不在 BP 上。兩條相異的平行線永不相交。

所以對於每一個非零的 λ，直線 AQ 和 BP 都不相交，正如題目所求。（當 $\lambda=0$ 時，$A=B=O$，兩條直線確實相交於 O，這正是題目把它排除在外的原因。）

驗算

- 一望而知，$\mathbf{i}$ 與 $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ 的夾角為 $\pi/4$，這正好印證了二次方程的第一個根，令人安心。
- 當 $\lambda=1+\sqrt{2/3}\approx 1.8165$ 時，點積 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的數值計算結果為 0（準確至 10^{-16}），當 $\lambda\approx 0.1835$ 時亦然。
- 對 $\lambda=0.001, 0.002, \ldots, 5$ 計算直線 AQ 與 BP 之間的最短距離（並對 P 和 Q 的另一種標記方式作同樣計算），結果從不為零；只有當 $\lambda\to 0$ 時，距離才趨向零。

常見錯誤

- 遺漏 $a+b=1$，$a+c=-1$ 這個情況：它雖然得不出任何解，但仍須加以排除。
- 寫到「三重積在 $\lambda = \frac{2}{3}$ 時等於零，所以兩線相交」便停筆。共面的直線可以是平行的，而這裏正是如此。

STEP 之外

純量三重積是一個 3×3 行列式（determinant），它等於零即表示三個向量線性相關（linearly dependent）；兩條歪斜線（skew lines）之間的最短距離 $|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| / |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$，也是由同樣的組件構成的。在大學一年級的線性代數（linear algebra）課程中，這些概念會透過行列式、秩（rank）和子空間（subspace）的幾何統一起來。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）以大量三維圖像闡述這些內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。