詳細解答

STEP II 2002，第 6 題

純數學 • 斜面上的直線

> **STEP II 2002，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q6

關鍵思路

整道題都建基於斜面（inclined plane）的一個事實：若斜面上的一條直線與最大斜率線（line of greatest slope）成角 ψ，則它與水平面所成的角 γ 滿足

$$\sin\gamma = \cos\psi \, \sin\beta,$$

其中 β 是最大斜率線的傾角。有了這個結果，題目中每條直線都給出一條三角方程，而 l_1 與 l_3 互相垂直，則把一個餘弦變成正弦。之後就只是代數運算了。

解答

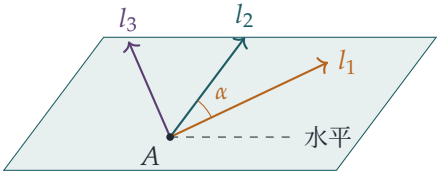
斜面上一條直線的斜度

以 A 為原點建立坐標軸，z 軸鉛垂向上。設 $\mathbf{h}$ 為位於 P 內的水平單位向量（unit vector），並設 $\mathbf{u}$ 為沿最大斜率線 l_2 向上的單位向量，它在 P 內與 $\mathbf{h}$ 垂直。由於 l_2 與水平面成角 β，我們可取

$$\mathbf{h} = (1,0,0), \qquad \mathbf{u} = (0, \cos\beta, \sin\beta).$$

在 P 內與 $\mathbf{u}$ 成角 ψ 的單位向量是 $\mathbf{d} = \cos\psi\,\mathbf{u} + \sin\psi\,\mathbf{h}$，因為 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{h}$ 標準正交（orthonormal），並且張成（span）P。它的鉛垂分量是 $\cos\psi\sin\beta$。若一條直線的單位方向向量為 $\mathbf{d}$，則它與水平面所成的角 γ 滿足 $\sin\gamma =$ |鉛垂分量，取自$\mathbf{d}$|，所以

$$\sin\gamma = |\cos\psi| \, \sin\beta. \qquad (*)$$



第一個位置

在 P 內，直線 l_1 與 l_2 成銳角（acute angle）α，而它與水平面所成的角是 $\pi/6$。由 $(*)$，

$$\cos\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2},$$

正是所要證明的結果（這裏 $\cos\alpha > 0$，因為 α 是銳角）。

> **想一想** l_3 與 l_2 所成的角是多少？

三條直線都位於同一平面 P 內，並且都通過 A。由於 $l_3 \perp l_1$，l_3 的方向就是 l_1 的方向在 P 內轉過一個直角所得的方向，所以 l_3 所成的角是 $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$，這是相對於 l_2 而言的（正負號取決於轉動的方向，但並不影響結果）。無論哪一種情況，都有 $|\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2})| = \sin\alpha$，因為 α 是銳角。於是把 $(*)$ 用於 l_3，得

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

把兩個結果平方後相加，

$$\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}, \qquad \text{故} \qquad \sin^2\beta = \tfrac{3}{4}.$$

直線與水平面所成的角 β 位於 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 之內，所以 $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\beta = \pi/3$，正是所要證明的結果。（順帶一提，把兩條方程相除可得 $\tan\alpha = \sqrt{2}$，這確實對應一個銳角，所以這個位置是存在的。）

轉動後的位置

平面沒有改變，因此 l_2 和 $\beta = \pi/3$ 也沒有改變。現在 l_1 與 l_2 成銳角 θ，而 l_3 所成的角是 $\theta \pm \frac{\pi}{2}$，與之前完全一樣。把 $(*)$ 分別用於兩條直線，並代入 $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$：

$$\sin\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,$$
$$\sin 2\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

由於 2ϕ 是與水平面所成的角，故 $0 \le 2\phi \le \frac{\pi}{2}$，而且 $\phi \neq 0$，因為 $\cos\theta > 0$。所以 $\sin\phi > 0$，我們可以把第二條方程除以第一條：

$$\tan\theta = \frac{\sin 2\phi}{\sin\phi} = \frac{2\sin\phi\cos\phi}{\sin\phi} = 2\cos\phi.$$

設 $t = \tan^2\theta$，則 $\cos^2\phi = t/4$ 及 $\sin^2\phi = 1 - t/4$。為了消去 θ，我們把 $\cos^2\theta = 1/(1+\tan^2\theta)$ 代入第一條方程的平方：

$$1 - \frac{t}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+t} \quad\Longrightarrow\quad (4-t)(1+t) = 3 \quad\Longrightarrow\quad t^2 - 3t - 1 = 0.$$

因此 $t = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{13}\right)$。由於 $t = \tan^2\theta \geq 0$ 而 $\sqrt{13} > 3$，我們必須取正號：

$$\tan^2\theta = \frac{3+\sqrt{13}}{2},$$

正是所要證明的結果。

這個根確實可以達到：它給出 $\cos^2\phi = t/4 \approx 0.826$，所以 $\phi \approx 24.7°$，$2\phi \approx 49.4° < 90°$，而 $\theta \approx 61.2°$ 是銳角。

驗算

- 在第一個位置，$\tan\alpha = \sqrt{2}$ 給出 $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$，$\sin\alpha = \sqrt{2/3}$，再配合 $\sin\beta = \sqrt{3}/2$，兩個乘積分別是 $\frac{1}{2}$ 和 $1/\sqrt{2}$，與應有的結果相符。
- 以數值計算，$\tan^2\theta \approx 3.3028$，所以 $\tan\theta \approx 1.8174$，$\theta \approx 61.18°$；於是 $\sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \approx 0.4175$ 給出 $\phi \approx 24.68°$，而 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \approx 0.7589 \approx \sin(49.35°) = \sin 2\phi$。
- $(*)$ 的極限情況：$\psi = 0$ 給出 l_2 本身（所成的角為 β），而 $\psi = \frac{\pi}{2}$ 給出一條水平線（所成的角為 0）。

常見錯誤

- 誤用 $\tan\gamma = \cos\psi\tan\beta$ 而不是 $\sin\gamma = \cos\psi\sin\beta$。只有當 ψ 是在水平的平面圖上量度時，正切的版本才正確，但這裏 α 和 θ 都是在 P 內量度的角。
- 忘記捨去負根 $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$：平方數不可能是負數。

STEP 之外

公式 $(*)$ 其實就是一個點積（dot product）：直線與水平面所成角的正弦，就是它的單位向量在鉛垂方向上的分量，而把這個向量用平面的一組標準正交基（orthonormal basis）表示出來，便完成了全部工作。把平面看成標準正交向量所張成的空間，把角看成點積，正是大學一年級線性代數（linear algebra）以及旋轉幾何的起點。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對這些想法有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。