詳細解答

STEP II 2002，第 5 題

純數學 • 邏輯斯諦映射的迭代

> **STEP II 2002，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q5

關鍵思路

一切都取決於拋物線（parabola）$y = kx(1-x)$，它在 $[0,1]$ 上的最大值是 $\frac{k}{4}$，在 $x = \frac{1}{2}$ 處取得。單憑這一點，就可以用歸納法（induction）解決第 (i) 部分。第 (ii) 和第 (iii) 部分先後要求找出不動點（fixed point）和週期（period）為二的點。第 (iii) 部分的竅門是把 x_1 用 b 表示：$x_1 = ka(1-a) = ab$。這樣 $x_2 = a$ 就變成一條關於 b 的三次方程（cubic），而這條三次方程有一個明顯的根（root），正好就是第 (ii) 部分的不動點。

解答

第 (i) 部分

我們對 n 使用歸納法。$n = 0$ 的情況是已知條件。假設 $0 < x_n < 1$，則 $x_n > 0$ 且 $1 - x_n > 0$，所以 $x_n(1-x_n) > 0$。利用配方法（completing the square），

$$x_n(1-x_n) = \tfrac{1}{4} - \left(x_n - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}.$$

由於 $0 < k < 4$，各項乘以 k 後不等式（inequality）方向不變，於是

$$0 < x_{n+1} = kx_n(1-x_n) \leq \tfrac{k}{4} < 1.$$

所以 $0 < x_{n+1} < 1$，由歸納法可知對所有 n 都有 $0 < x_n < 1$。留意每個假設在哪裏用到：$k > 0$ 用於下界，$k < 4$ 用於上界。

第 (ii) 部分

要得到常數數列（constant sequence），只需 $x_1 = x_0$，即 $a = ka(1-a)$。由於 $a \neq 0$，可以除以 a 得 $1 = k(1-a)$；又由於 $a \neq 1$，可以除以 $1-a$：

$$k = \frac{1}{1-a}.$$

反過來，取這個 k 時有 $x_1 = a$，因此其後每一項也都是 a。

第 (iii) 部分

設 $b = k(1-a)$，則

$$x_1 = ka(1-a) = ab.$$

若 $x_2 = a$，數列便以週期二重複，所以整個條件就只是 $x_2 = a$：

$$k\,(ab)(1-ab) = a.$$

除以 $a \neq 0$，得 $kb(1-ab) = 1$。由於 $a \neq 1$，可以寫成 $k = \dfrac{b}{1-a}$，所以

$$\frac{b^2(1-ab)}{1-a} = 1 \quad \Longrightarrow \quad b^2 - ab^3 = 1-a \quad \Longrightarrow \quad ab^3 - b^2 + (1-a) = 0,$$

這就是所要求的結果。

想一想 這條三次方程有哪一個根可以一眼看出？它代表甚麼？

代入 $b = 1$ 得 $a - 1 + 1 - a = 0$，所以 $b = 1$ 是一個根。但 $b = 1$ 即是 $k(1-a) = 1$，這正是第 (ii) 部分的不動點：此時 $x_1 = ab = a$。所以額外條件 $x_1 \neq a$，即 $ab \neq a$，恰好就是 $b \neq 1$。除去因式 $b - 1$：

$$ab^3 - b^2 + (1-a) = (b-1)(ab^2 + (a-1)b + (a-1)),$$

你可以展開來驗證。所以 b 必須是

$$ab^2 - (1-a)b - (1-a) = 0$$

的一個不等於 1 的根。由於 $a \neq 0$，這確實是一條二次方程（quadratic），其根為

$$b = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)^2 + 4a(1-a)}}{2a} = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2a}.$$

要有實根，需要 $(1-a)(1+3a) \geq 0$，即 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$。連同 $a \neq 0, 1$，餘下的範圍是 $-\frac{1}{3} \leq a < 1$，$a \neq 0$。對於 a 的任何其他值，都沒有實數 k 符合要求。

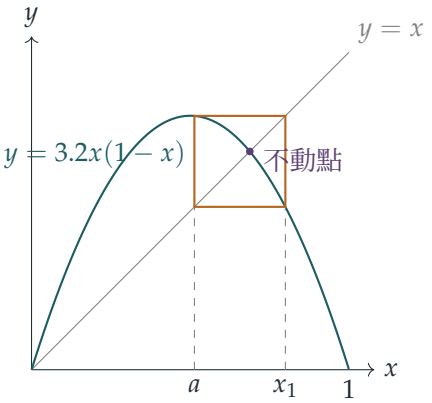
在這個範圍內 $1-a>0$，所以除以 $1-a$ 便得到形式簡潔的 $k=b/(1-a)$，當中用到 $\sqrt{(1-a)(1+3a)}/(1-a)=\sqrt{(1+3a)/(1-a)}$：

$$\boxed{k=\frac{1}{2a}\left(1\pm\sqrt{\frac{1+3a}{1-a}}\right),\qquad -\tfrac{1}{3}\le a<1,\ a\neq 0.}$$

最後還有一件事：我們必須確保這兩個值都不是被排除的根 $b=1$。這條二次方程只有在 $a+(a-1)+(a-1)=0$，即 $a=\frac{2}{3}$ 時，才以 $b=1$ 為根。這時 $\sqrt{(1+3a)/(1-a)}=3$，兩個值分別是 $k=3$（即 $b=1$，也就是不動點，故須排除）和 $k=-\frac{3}{2}$。所以：

- 當 $a=\frac{2}{3}$ 時，唯一的可能是 $k=-\frac{3}{2}$；
- 當 $a=-\frac{1}{3}$ 時，正負兩個符號給出相同的值，$k=-\frac{3}{2}$；
- 對於其餘所有容許的 a，兩個符號都給出真正的 2-循環（cycle）。

下圖顯示了其中一個這樣的循環，取 $k=3.2$。軌道（orbit）在 $a\approx 0.513$ 與 $x_1\approx 0.800$ 之間來回跳動，在拋物線與直線 $y=x$ 之間描出一個正方形。



驗算

- 取 $a=0.7$。公式給出 $k\approx 3.0104$ 或 $k\approx -1.5818$。取 $k\approx 3.0104$ 時，得 $x_1\approx 0.6322$，然後 $x_2\approx 0.7000$，所以軌道的週期確實是二。
- 當 $a=\frac{2}{3}$ 時，$k=3$ 給出 $x_1=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，即不動點，與預期相符。取 $k=-\frac{3}{2}$ 時，得 $x_1=-\frac{1}{3}$ 和 $x_2=-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{3})\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$，是真正的 2-循環。
- 數值上，對數以千計隨機選取的 $a\in[-\frac{1}{3},1)$，不論取哪個符號，$x_2=a$ 都成立。對於該區間以外的 a，在 k 的範圍內逐一搜尋，除了不動點 $k=1/(1-a)$ 之外找不到任何解。

常見錯誤

- 忘記三次方程必定包含不動點那個解。看出 $b = 1$ 這個根，正是令三次方程變得容易處理的關鍵。
- 遺漏實根條件 $-\frac{1}{3} \leq a < 1$，或沒有留意到當 $a = \frac{2}{3}$ 時，k 的兩個值之中有一個是不動點，必須捨去。
- 在第 (i) 部分只證明了 $x_{n+1} \leq \frac{1}{4}k$，卻沒有指出因為 $k < 4$，這個值嚴格小於 1。

STEP 之外

這就是邏輯斯諦映射（logistic map），是「規則簡單而行為極其豐富」的經典例子。當 k 在通常的範圍 $0 < k \leq 4$ 內，你找到的 2-循環恰好在 $k > 3$ 時存在：在 $k = 3$ 處，不動點失去穩定性，並分裂成兩個點。這是第一次*倍週期分岔*（*period-doubling bifurcation*）。其後還會繼續倍增，出現倍增的 k 值以幾何方式愈聚愈密（其比率由費根鮑姆（Feigenbaum）常數決定），直至映射進入混沌(chaotic)狀態。斯托加茨(Strogatz)的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非線性動力學與混沌》）以大學一年級的程度講述了整個故事。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。