詳細解答

STEP II 2002，第 4 題

純數學 • 由積分推導不等式

STEP II 2002，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s2-q4

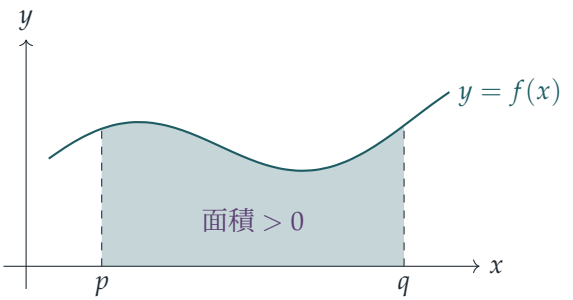
關鍵思路

二次式（quadratic）$as^2 - bs + c$ 若滿足 $a > 0$ 和 $b^2 < 4ac$，便沒有實根，而且首項係數為正，所以對每一個實數 s 都取正值。無論把 s 換成甚麼（x、$\sin x$ 或 $1/x$），所得的函數都是正的，因此它在任何區間上的積分（integral）都是正的。於是每一部分要做的，只是選好代換和區間，使積分剛好給出所求不等式（inequality）中的那些數。

解答

開首的略圖

積分 $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲線 $y = f(x)$ 與 x 軸之間由 $x = p$ 至 $x = q$ 的有向面積（signed area）：在軸上方的面積算作正，在軸下方的面積算作負。若在整個 $p < x < q$ 上都有 $f(x) > 0$，整條曲線在該處便位於軸的上方，所以這個區域沒有負的部分，並且有真正（非零）的面積。因此積分嚴格為正。（本題所有函數都是連續（continuous）的，所以面積有明確定義。）



每一部分都會用到的事實

設 $g(s) = as^2 - bs + c$，其中 $a > 0$ 及 $b^2 < 4ac$。配方（completing the square）後得

$$g(s) = a\left(s - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

由於 $a > 0$，第一項至少為 0；又由於 $4ac - b^2 > 0$ 及 $a > 0$，第二項嚴格為正。所以對所有實數 s 都有 $g(s) > 0$。

第 (i) 部分

取 $f(x) = ax^2 - bx + c = g(x)$，它對所有 x 都是正的。我們可以在任何喜歡的區間上積分，而 $[0, 1]$ 給出的數最簡單：

$$0 < \int_0^1 (ax^2 - bx + c)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c.$$

乘以 6 得 $2a - 3b + 6c > 0$，即 $3b < 2a + 6c$，這正是所要證明的。

第 (ii) 部分

現在 $f(x) = a\sin^2 x - b\sin x + c = g(\sin x)$。既然 g 在每一個實數上都取正值，它在 $\sin x$ 上當然也取正值，所以對所有 x 都有 $f(x) > 0$。

> **想一想** 我們應該在哪一個區間上積分？

目標不等式中，π 乘在 a 和 c 上，卻沒有乘在 b 上。在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上，$\int \sin x\,\mathrm{d}x = 1$ 不含 π，而 $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int 1\,\mathrm{d}x$ 則含有。利用 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$，

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

因此

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a\pi}{4} - b + \frac{c\pi}{2}.$$

乘以 4 得 $a\pi + 2c\pi - 4b > 0$，即 $4b < (a + 2c)\pi$，這正是所要證明的。

第 (iii) 部分

> **想一想** 哪一個函數的積分會給出 $\ln(q/p)$、$\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ 和 $q - p$？

它們分別是 $\int_p^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$、$\int_p^q \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_p^q 1\,\mathrm{d}x$。所以取

$$f(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c = g\left(\frac{1}{x}\right),$$

它在 $x > 0$ 時有定義而且連續，並且由於 g 處處為正，它在該處也是正的。因為 $q > p > 0$，區間 $[p,q]$ 避開了 $x = 0$，所以

$$0 < \int_p^q \left(\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{a}{x} - b\ln x + cx\right]_p^q$$
$$= a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - b\ln\frac{q}{p} + c(q-p).$$

移項後得 $b\ln(q/p) < a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + c(q-p)$，這正是所要證明的。（條件 $p > 0$ 也讓我們可以寫出 $\ln q - \ln p = \ln(q/p)$，其中兩個對數都有定義。）

驗算

取 $a = b = c = 1$，則 $b^2 = 1 < 4 = 4ac$。這時 (i) 說 $3 < 8$，(ii) 說 $4 < 3\pi \approx 9.42$，而 (iii) 取 $p = 1$、$q = 2$ 時說 $\ln 2 \approx 0.693 < \frac{1}{2} + 1 = 1.5$。全部成立。我們還用 20 000 組符合條件的隨機三元組 (a,b,c) 測試了全部三個不等式，當中包括 b^2 僅略小於 $4ac$ 的情況，並以辛普森法則（Simpson's rule）核對了每個積分。留意若沒有這些條件，不等式可以不成立：$a = 1$、$b = 10$、$c = 1$ 會令 (i) 失效，因為 $30 > 8$。

常見錯誤

- 忘記說明為何 $f > 0$：條件 $a > 0$ 和 $b^2 < 4ac$ 正是令二次式取正值的原因，這一點必須寫出來。
- 在 (ii) 中，誤取 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$，而正確的值是 $\frac{\pi}{4}$。
- 在 (iii) 中，沒有提到 $p > 0$ 保證了 $x = 0$（f 在該處無定義）不在區間之內。

STEP 之外

「正的連續函數有正的積分」這個原理，是大學第一門分析課中為黎曼積分（Riemann integral）證明的基本性質之一。它與線性性質（linearity）結合起來，便是許多經典不等式的來源，其中包括柯西－施瓦茲不等式（Cauchy–Schwarz inequality）的積分形式：把平方 $(f + tg)^2 \geq 0$ 積分，再用上與本題相同的判別式（discriminant）論證，便可得出。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門教科書）正是從這個角度仔細地建立積分理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。