詳細解答

STEP II 2002，第 2 題

純數學 • 倒數多項式方程

> **STEP II 2002，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q2

關鍵思路

由外至內觀察各項係數：先是 1 和 1，然後是 5 和 -5，最後是中間的 4。係數成對相等或成對異號，表示把方程除以 z 的中間次冪之後，只會剩下 $z^k + z^{-k}$ 和 $z^k - z^{-k}$ 的組合，而這些式子每一個都是 $w = z - z^{-1}$ 的多項式（polynomial）。這樣次數（degree）便減半。那個八次方程也有相同的結構，而且化簡之後，竟然再一次出現這種結構，所以這個技巧要用兩次。

解答

四次方程

由於 $z = 0$ 不是根（root）（常數項是 1），我們可以除以 z^2：

$$z^2 + 5z + 4 - 5z^{-1} + z^{-2} = 0, \qquad \text{即} \qquad \left(z^2 + z^{-2}\right) + 5\left(z - z^{-1}\right) + 4 = 0.$$

設 $w = z - z^{-1}$，則 $w^2 = z^2 - 2 + z^{-2}$，所以 $z^2 + z^{-2} = w^2 + 2$。代入得

$$(w^2 + 2) + 5w + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + 5w + 6 = 0,$$

正如題目所求。此式可因式分解（factorise）為 $(w + 2)(w + 3) = 0$，所以 $w = -2$ 或 $w = -3$。

要回到 z，把 $z - z^{-1} = w$ 兩邊乘以 z：

$$z^2 - wz - 1 = 0.$$

▶ $w = -2$：$z^2 + 2z - 1 = 0$，所以 $z = -1 \pm \sqrt{2}$。

► $w=-3$：$z^2+3z-1=0$，所以 $z=\frac{1}{2}\left(-3\pm\sqrt{13}\right)$。

這四個互不相同的值就是該四次方程的根：

$$z=-1\pm\sqrt{2},\qquad z=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

八次方程

同樣，$z=0$ 不是根，所以我們除以 z^4，並把係數以中間項為中心對稱地配對：

$$2\left(z^4+z^{-4}\right)-3\left(z^3-z^{-3}\right)-12\left(z^2+z^{-2}\right)+12\left(z-z^{-1}\right)+22=0.$$

（核對各對係數：z^8 和 z^0 的係數都是 2；z^7 的係數是 -3，z^1 的係數是 $+3$；z^6 和 z^2 的係數都是 -12；z^5 的係數是 12，z^3 的係數是 -12。）

我們需要把每個括號都以 $w=z-z^{-1}$ 表示。已知 $z^2+z^{-2}=w^2+2$。取立方，

$$w^3=z^3-3z+3z^{-1}-z^{-3}\quad\Longrightarrow\quad z^3-z^{-3}=w^3+3w,$$

再把 z^2+z^{-2} 平方，

$$z^4+z^{-4}=\left(z^2+z^{-2}\right)^2-2=(w^2+2)^2-2=w^4+4w^2+2.$$

代入得

$$\begin{aligned}0&=2(w^4+4w^2+2)-3(w^3+3w)-12(w^2+2)+12w+22\\&=2w^4-3w^3-4w^2+3w+2.\end{aligned}$$

想一想 現在剩下一個 w 的四次方程。我們有甚麼得着嗎？

有：看看它的係數 2, −3, −4, 3, 2。它們的規律與之前完全一樣（最外面的一對相等，其次的一對異號），所以同一個技巧可以在下一層再用一次。由於 $w=0$ 不是根，除以 w^2：

$$2\left(w^2+w^{-2}\right)-3\left(w-w^{-1}\right)-4=0.$$

設 $v=w-w^{-1}$，於是 $w^2+w^{-2}=v^2+2$：

$$2(v^2+2)-3v-4=0\quad\Longleftrightarrow\quad 2v^2-3v=0\quad\Longleftrightarrow\quad v(2v-3)=0.$$

所以 $v=0$ 或 $v=\frac{3}{2}$。現在利用 $w^2-vw-1=0$ 逐層還原：

► $v=0$：$w^2=1$，所以 $w=\pm1$。

► $v=\frac{3}{2}$：$2w^2-3w-2=0$，即 $(2w+1)(w-2)=0$，所以 $w=2$ 或 $w=-\frac{1}{2}$。

最後利用 $z^2 - wz - 1 = 0$ 再還原一次：

- $w = 1$：$z^2 - z - 1 = 0$，所以 $z = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$。
- $w = -1$：$z^2 + z - 1 = 0$，所以 $z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$。
- $w = 2$：$z^2 - 2z - 1 = 0$，所以 $z = 1 \pm \sqrt{2}$。
- $w = -\frac{1}{2}$：$2z^2 + z - 2 = 0$，所以 $z = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right)$。

每個二次方程 $z^2 - wz - 1 = 0$ 的判別式（discriminant）都是 $w^2 + 4 > 0$，所以這些根全是實數，而且這八個值互不相同。由於八次多項式最多只有八個根，這些就是全部的根：

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = 1 \pm \sqrt{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

驗算

- 由 $z^2 - wz - 1 = 0$ 得出的每一對根，乘積都是 -1，可以用來快速檢查計算有沒有出錯：例如 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$。
- 對於八次方程，各根之和應為 $\frac{3}{2}$（即 z^7 的係數除以 z^8 的係數，再取負號）。四對根的貢獻是 $1 - 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$。正確。
- 以數值計算，$z = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17}) \approx 0.7808$ 代入八次多項式所得的值與零相差不超過 10^{-9}，其餘七個根以及四次方程的四個根亦然。

常見錯誤

- 寫成 $z^3 - z^{-3} = w^3$：交叉項會多出 $3w$。
- 得到 w 的四次方程後便停下來，嘗試用試根的方法把它因式分解，而沒有留意到它的係數具有相同的對稱性。
- 只給出 w（或 v）的值，忘記回到 z。

STEP 之外

如果一個多項式的係數倒過來讀仍然一樣（或者只差交錯的正負號），便稱為*倒數多項式*（reciprocal polynomial）或*迴文多項式*（palindromic polynomial）；它們的根成對出現，每對之間以 $z \mapsto 1/z$ 或 $z \mapsto -1/z$ 相聯繫，而本題的代換正是這種對稱性所容許的化簡。在伽羅瓦理論（Galois theory）中，這相當於觀察到方程在根的某一組變換所構成

的羣（group）之下保持不變，因此可以經由一連串較小的方程分階段求解，本題的情況正是如此：先是八次，然後四次，再到二次。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是了解這些想法如何發展的好讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。