詳細解答

STEP II 2002，第 13 題

概率與統計 • 變換後的分佈函數

> **STEP II 2002，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q13

關鍵思路

這一題雖然放在力學部分，其實是一道關於變換分佈函數（distribution function）的概率題。一切都建基於一條公式：對 G 求導得 $G'(y) = f(y) \cdot \dfrac{2}{(2-F(y))^2}$，其中 $f = F'$ 是 X 的概率密度函數（density）。因此，Y 的密度就是 X 的密度乘以一個權重，而這個權重被夾在 $\frac{1}{2}$ 與 2 之間。有了這一點，Y 的每一個期望值（expectation）都是 X 的密度乘以一個在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 內的權重的積分，只要比較被積函數（integrand），便可得出各個不等式。條件 $a > 0$ 的作用，是確保被積函數非負。

解答

G 的性質

我們按題目的原意，假設 X 在 $[a, b]$ 上有密度 $f(y) = F'(y) \geq 0$，因此 X 的全部概率都落在 $[a, b]$ 內。

由於 $F(a) = 0$ 及 $F(b) = 1$，

$$G(a) = \frac{0}{2-0} = 0, \qquad G(b) = \frac{1}{2-1} = 1.$$

由商法則（quotient rule），

$$G'(y) = \frac{F'(y)(2-F(y)) - F(y)(-F'(y))}{(2-F(y))^2} = \frac{2F'(y)}{(2-F(y))^2}.$$

分子非負，因為分佈函數是非遞減的，所以 $F'(y) \geq 0$。分母是 $2 - F(y) \geq 1$ 的平方，故為正數。因此 $G'(y) \geq 0$。

至於那個界，由於 F 是分佈函數，故 $0 \le F(y) \le 1$。於是

$$1 \le 2 - F(y) \le 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le (2 - F(y))^2 \le 4 \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \le \frac{2}{(2 - F(y))^2} \le 2,$$

其中各項皆為正數，所以取平方後不等號方向不變；取倒數會令不等號反向，再乘以 2 則只是把各項按比例放大。這就是所求的雙重不等式。

綜合而言，$G(a) = 0$、$G(b) = 1$ 以及 G 非遞減，說明 G 確實是 $[a, b]$ 上的一個分佈函數，所以隨機變量（random variable）Y 是有意義的。它的密度是

$$g(y) = G'(y) = w(y)\, f(y), \qquad \text{其中} w(y) = \frac{2}{(2 - F(y))^2} \in [\tfrac{1}{2}, 2].$$

$\mathrm{E}(Y)$ 的界

想一想 為甚麼我們可以把不等式 $\frac{1}{2} \le w(y) \le 2$ 乘以 $yf(y)$，而不等號方向保持不變？

因為在 $[a, b]$ 上 $yf(y) \ge 0$：我們有 $f(y) \ge 0$，而且 $y \ge a > 0$。假設 $a > 0$ 正是用在這裏。因此

$$\tfrac{1}{2}\, yf(y) \le y\, w(y) f(y) \le 2\, yf(y) \qquad \text{對於} a \le y \le b,$$

而在 $[a, b]$ 上積分後，不等式依然成立：

$$\tfrac{1}{2} \int_a^b yf(y)\, \mathrm{d}y \;\le\; \int_a^b y\, g(y)\, \mathrm{d}y \;\le\; 2 \int_a^b yf(y)\, \mathrm{d}y,$$

即

$$\tfrac{1}{2}\, \mathrm{E}(X) \le \mathrm{E}(Y) \le 2\, \mathrm{E}(X),$$

這正是所要證明的。

$\mathrm{Var}(Y)$ 的界

同樣地，$y^2 f(y) \ge 0$（這只需要 $f \ge 0$），所以把 $w(y) \le 2$ 乘以它再積分，得

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_a^b y^2\, w(y) f(y)\, \mathrm{d}y \le 2 \int_a^b y^2 f(y)\, \mathrm{d}y = 2\, \mathrm{E}(X^2).$$

對於被減去的那一項，我們需要的是 $(\mathrm{E}(Y))^2$ 的下界。由上一部分，$\mathrm{E}(Y) \ge \frac{1}{2}\mathrm{E}(X)$，而且因為 $X \ge a > 0$，所以 $\mathrm{E}(X) > 0$。兩邊都是正數，故可以放心取平方：

$$(\mathrm{E}(Y))^2 \ge \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2.$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 \\ &\le 2\,\mathrm{E}(X^2) - \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2 \\ &= 2(\operatorname{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2) - \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2 \\ &= 2\operatorname{Var}(X) + \tfrac{7}{4}(\mathrm{E}(X))^2,\end{aligned}$$

其中第三行用了 $\mathrm{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2$。這就是所求的界。

驗算

取 X 為 $[1,3]$ 上的均勻分佈（uniform distribution），則 $F(y) = \frac{1}{2}(y-1)$，且 $\mathrm{E}(X) = 2$。由於 $Y \ge 1$，故 $\mathrm{E}(Y) = 1 + \int_1^3 (1 - G(y))\,\mathrm{d}y$；代入 $u = F(y)$ 得

$$\mathrm{E}(Y) = 1 + 2\int_0^1 \frac{2(1-u)}{2-u}\,\mathrm{d}u = 1 + 4(1 - \ln 2) \approx 2.227,$$

穩穩地落在 1 與 4 之間。直觀地說，w 在 F 小的地方較小，在 F 接近 1 的地方較大，所以 Y 偏向區間的上端，在這個例子中 $\mathrm{E}(Y) > \mathrm{E}(X)$。我們亦以數值方法驗證過：對於隨機區間上的 300 個隨機冪律分佈（power-law distribution），$\frac{1}{2}\mathrm{E}(X) \le \mathrm{E}(Y) \le 2\mathrm{E}(X)$ 與方差（variance）的界都成立；觀察所得的比值 $\mathrm{E}(Y)/\mathrm{E}(X)$ 大約介乎 0.92 與 1.31 之間。

常見錯誤

- 忘記了 $a > 0$ 為何重要：假如 X 可以取負值，$yf(y)$ 便可能是負數，乘以它會令不等號反向。
- 用 $\mathrm{E}(Y) \le 2\mathrm{E}(X)$ 來估計 $\operatorname{Var}(Y)$ 的界：$(\mathrm{E}(Y))^2$ 這一項是被減去的，所以你需要的是它的下界，而不是上界。
- 試圖把 $(y-\mu)^2$ 對 g 積分，直接比較 $\operatorname{Var}(Y)$ 與 $\operatorname{Var}(X)$：兩個方差所用的平均值並不相同，所以應改用 $\mathrm{E}(Y^2)$ 來處理。

STEP 之外

寫成 $g = wf$，是測度變換（change of measure）的一個簡單例子：新的分佈相對於舊的分佈有一個密度（稱為似然比（likelihood ratio），或 Radon–Nikodym 導數），而這個比值的界可以直接轉化為期望值的界。統計學中的重要性抽樣（importance sampling），以及金融數學中所用的概率測度變換，都以這個想法為基礎。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）講解分佈函數、密度與期望值，程度正好適合由此再深入探究。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。