詳細解答

STEP II 2002，第 11 題

力學 • 摩擦力與極限平衡

> **STEP II 2002，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q11

關鍵思路

第一部分是直接的質心（centre of mass）積分；代換 $t = x/l$ 之後一行便可完成。至於梯子，「兩端同時處於極限狀態」令四個接觸力全部化為同一個未知量的倍數，因此分解兩次，再對 A 取力矩（moment），立即得出 $\tan\theta$。最後一部分還需要多一個想法：橫樑豎得愈陡便愈安全，所以「對每個 $\theta < \pi/4$ 都會滑動」即是說極限角至少為 $\pi/4$。

解答

質心

距離 B 為 x 處、長度為 δx 的一小段，其重量為 $\alpha W l^{-1}(x/l)^{\alpha-1}\,\delta x$。設 $t = x/l$（故 $\mathrm{d}x = l\,\mathrm{d}t$），總重量為

$$\int_0^l \frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = W,$$

正如所料（由於 $\alpha > 0$，此積分收斂）。重量對 B 的力矩為

$$\int_0^l x\,\frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W l\int_0^1 t^{\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha W l}{\alpha+1}.$$

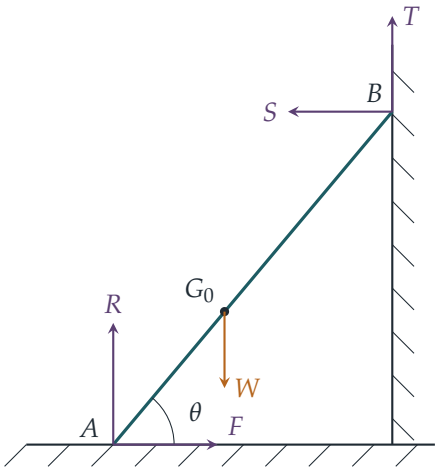
除以 W，可知質心 G_0 與 B 的距離為 $\alpha l/(\alpha+1)$，正是所求。因此它與 A 的距離為

$$d = l - \frac{\alpha l}{\alpha+1} = \frac{l}{\alpha+1}$$

稍後對 A 取力矩時，用的就是這個距離。

兩端同處極限平衡

把橫樑看成剛性桿（rigid rod），在 A 和 B 兩處均為粗糙接觸。若橫樑滑動，A 會遠離牆壁，B 會向下移動，所以摩擦力（friction）在 A 處指向牆壁，在 B 處向上。設地面在 A 處施加法向反作用力（normal reaction）R 和摩擦力 F，牆壁在 B 處施加法向反作用力 S 和摩擦力 T。重量作用於 G_0，與 A 相距 $l/(\alpha+1)$。



沿水平和垂直方向分解，並對 A 取力矩（重量的作用線與 A 的水平距離為 $d\cos\theta$；B 的高度為 $l\sin\theta$，水平距離為 $l\cos\theta$）：

$$\begin{aligned} F &= S, \\ R + T &= W, \\ S\,l\sin\theta + T\,l\cos\theta &= W\,\frac{l}{\alpha+1}\cos\theta. \end{aligned}$$

兩端同處極限狀態，即 $F=\mu R$ 及 $T=\mu S$。於是 $S=F=\mu R$，$T=\mu S=\mu^2 R$，而垂直方向的方程給出

$$R(1+\mu^2)=W, \qquad \text{所以} \qquad S=\frac{\mu W}{1+\mu^2}, \quad T=\frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}.$$

把力矩方程除以 $l\cos\theta$ 再代入，

$$\frac{\mu W}{1+\mu^2}\tan\theta+\frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}=\frac{W}{1+\alpha} \quad\Longrightarrow\quad \mu\tan\theta=\frac{1+\mu^2}{1+\alpha}-\mu^2=\frac{1-\alpha\mu^2}{1+\alpha},$$

即

$$\tan\theta=\frac{1-\alpha\mu^2}{(1+\alpha)\mu},$$

正是所求。把這個角記作 θ_0，並設 $t_0=\tan\theta_0$。

μ 的最大值

想一想 為甚麼「對每個 $\theta < \pi/4$ 都會滑動」可以化為關於 θ_0 的條件？

我們證明：平衡（equilibrium）可能成立，當且僅當 $\tan\theta \geq t_0$。設 $t = \tan\theta$ 及 $k = 1/(1+\alpha)$，則力矩方程可寫成 $St + T = kW$。摩擦定律為 $F \leq \mu R$ 及 $|T| \leq \mu S$。

必要性（*necessity*）。由 $T \leq \mu S$ 及 $S = F \leq \mu R = \mu(W - T)$ 得 $T \leq \mu^2(W - T)$，所以 $T \leq \mu^2 W/(1+\mu^2)$。另外 $S \leq \mu(W - T)$，故

$$kW = St + T \leq \mu t(W - T) + T = \mu t W + (1 - \mu t)T.$$

若 $\mu t < 1$，利用 T 的上界可得 $kW \leq W(\mu t + \mu^2)/(1+\mu^2)$，整理後即 $t \geq t_0$。若 $\mu t \geq 1$，則無論如何都有 $t \geq 1/\mu > t_0$，因為 $\mu t_0 = (1 - \alpha\mu^2)/(1+\alpha) < 1$。兩種情況下，平衡都迫使 $t \geq t_0$。

充分性（*sufficiency*）。若 $t \geq t_0$（且 $t > 0$），取牆壁的摩擦力為極限值 $T = \mu S$，由力矩方程得 $S = kW/(t+\mu)$，並取 $F = S$，$R = W - T$。餘下唯一的條件是 $S \leq \mu R$，即 $S(1+\mu^2) \leq \mu W$，即 $k(1+\mu^2) \leq \mu(t+\mu)$，而這恰好就是 $t \geq t_0$。（此時亦有 $R > 0$。）

因此，橫樑在角 θ 時滑動，當且僅當 $\tan\theta < t_0$。「對每個 $\theta < \pi/4$ 都會滑動」即 $t_0 \geq 1$：若 $t_0 \geq 1$，每個 $\theta < \pi/4$ 都滿足 $\tan\theta < 1 \leq t_0$；若 $t_0 < 1$，任何滿足 $\max(t_0, 0) < \tan\theta < 1$ 的角都小於 $\pi/4$，卻處於平衡。

取 $\alpha = \frac{3}{2}$，

$$t_0 = \frac{1 - \frac{3}{2}\mu^2}{\frac{5}{2}\mu} = \frac{2 - 3\mu^2}{5\mu} \geq 1 \iff 3\mu^2 + 5\mu - 2 \leq 0 \iff (3\mu - 1)(\mu + 2) \leq 0,$$

其中兩邊乘以了 $5\mu > 0$。由於 $\mu + 2 > 0$，上式成立當且僅當 $\mu \leq \frac{1}{3}$。所以最大可能值為

$$\mu = \tfrac{1}{3}.$$

驗算

- 當 $\alpha = 1$ 時橫樑是均勻的，公式變成 $\tan\theta = (1 - \mu^2)/(2\mu)$，正是兩端摩擦系數相同的均勻梯子的常見結果。
- 當 $\mu = \frac{1}{3}$、$\alpha = \frac{3}{2}$ 時：$t_0 = (2 - \frac{1}{3})/\frac{5}{3} = 1$，恰好等於 1，所以極限角為 $\pi/4$。數值上，$\mu = 0.332$ 給出 $t_0 \approx 1.004$，而 $\mu = 0.334$ 給出 $t_0 \approx 0.996$。
- 當 $\alpha \to \infty$ 時，質量集中於 B（$d \to 0$），對任何 $\mu > 0$，$\tan\theta$ 都變為負數：橫樑在任何角度都能豎立。這很合理，因為此時重量幾乎作用在牆壁上。

常見錯誤

- 在力矩方程中把 $\alpha l/(\alpha+1)$ 當作與 A 的距離；它其實是由 B 量起的。
- 把牆壁的摩擦力畫成向下：橫樑滑動時 B 向下滑，所以橫樑在 B 處所受的摩擦力向上。
- 把最後的不等式方向弄反：較陡的橫樑較安全，所以「在 $\pi/4$ 以下會滑動」需要 $\tan\theta_0 \geq 1$，而最大的 μ 令 θ_0 恰好等於 $\pi/4$。

STEP 之外

上面的必要性與充分性論證，其實是一個小型的線性規劃（linear programming）問題：摩擦定律界定了一個由可容許的力組成的凸區域（convex region），而當力矩直線與這個區域相交時，平衡便可能成立。像本題這類靜不定（statically indeterminate）問題，即單憑方程不足以確定各力的問題，是大學一年級力學和工程學的常見課題。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）正是以這種嚴謹的方式處理摩擦、力矩和剛體平衡。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。