詳細解答

STEP II 2002，第 10 題

力學 • 運動學與最優化

STEP II 2002，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s2-q10

關鍵思路

總路程是固定的，所以完成比賽的時間 T 與轉換速度的時刻 t 由一條方程聯繫在一起。去分母後，它變成一條關於 t 的二次方程（quadratic），而某個時間 T 可以達到，當且僅當這條二次方程有實根。由判別式（discriminant）條件可直接得出 T 的最小值，完全不需要微積分。至於第二部分，一旦知道兩名跑手的位置如何隨時間變化，二人之間的距離便是一個分段二次函數（piecewise quadratic），我們用慣常的方法求其最大值即可。

解答

以下距離一律以 km 為單位，時間以小時為單位，並且 $42\frac{3}{8} = \frac{339}{8}$。

最短的比賽時間

第一名參賽者在最初 t 小時內跑了 $13t$，然後在餘下的 $T - t$ 小時內跑了 $(14 + \frac{2t}{T})(T - t)$。因此

$$13t + \left(14 + \frac{2t}{T}\right)(T - t) = \frac{339}{8}.$$

展開後得 $13t + 14T - 14t + 2t - \dfrac{2t^2}{T} = \dfrac{339}{8}$，即

$$t + 14T - \frac{2t^2}{T} = \frac{339}{8}.$$

兩邊乘以 $T > 0$，並按 t 的冪次整理：

$$2t^2 - Tt + \left(\frac{339}{8}T - 14T^2\right) = 0. \qquad (*)$$

想一想 我們要求最小的 T，但 T 並不是以 t 的函數形式給出的。怎樣才能判斷哪些 T 值是有可能出現的呢？

某個 T 值能夠出現，當且僅當 $(*)$ 有實數解 t，所以它的判別式必須非負：

$$T^2 - 8\Big(\frac{339}{8}T - 14T^2\Big) \geq 0 \iff 113T^2 - 339T \geq 0 \iff 113T(T-3) \geq 0.$$

由於 $T > 0$，這就迫使 $T \geq 3$。

這個下界是可以達到的。當 $T = 3$ 時，判別式為零，$(*)$ 變成

$$2t^2 - 3t + \Big(\frac{1017}{8} - 126\Big) = 2t^2 - 3t + \frac{9}{8} = 2\Big(t - \frac{3}{4}\Big)^2 = 0,$$

所以 $t = \frac{3}{4}$。這個值介乎 0 與 T 之間，因此確實是一個可行的比賽方案：先以速率 13 跑 45 分鐘，然後在餘下的 $2\frac{1}{4}$ 小時以速率 $14 + \frac{2(3/4)}{3} = 14.5$ 跑完。事實上 $13 \cdot \frac{3}{4} + 14.5 \cdot \frac{9}{4} = 9.75 + 32.625 = 42.375$。因此 T 的最小可能值是 3，正如題目所要求。

（等價地，對 $(*)$ 作隱函數求導（implicit differentiation）並令 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$，可得 $T = 4t$，代回去便得 $T = 3$。判別式的論證有一個好處：它證明了 3 是全局最小值（global minimum），而不僅僅是一個駐值（stationary value）。）

最大的相隔距離

設 τ 為起跑後所經過的時間。第二名參賽者的速率是 $16 - k\tau$，其中 k 為某個常數，所以其所跑的距離是

$$s_2(\tau) = 16\tau - \tfrac{1}{2}k\tau^2.$$

由 3 小時跑畢全程得 $48 - \frac{9}{2}k = \frac{339}{8}$，所以 $\frac{9}{2}k = \frac{45}{8}$，$k = \frac{5}{4}$。於是 $s_2 = 16\tau - \frac{5}{8}\tau^2$，而速率由 16 下降至 12.25，一直保持為正。

第一名參賽者同樣用了 3 小時，根據第一部分，這表示 $t = \frac{3}{4}$。其所跑的距離是

$$s_1(\tau) = \begin{cases} 13\tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{39}{4} + \frac{29}{2}(\tau - \frac{3}{4}), & \frac{3}{4} \leq \tau \leq 3. \end{cases}$$

設 $d = s_2 - s_1$。第二名跑手起步較快，所以我們預期 $d \geq 0$。

當 $0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}$：$d = 3\tau - \frac{5}{8}\tau^2$，而 $\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\tau} = 3 - \frac{5}{4}\tau > 0$。所以 d 在這個區間上遞增，升至 $d(\frac{3}{4}) = \frac{9}{4} - \frac{45}{128} = \frac{243}{128}$。

當 $\frac{3}{4} \leq \tau \leq 3$：

$$d = 16\tau - \tfrac{5}{8}\tau^2 - \tfrac{39}{4} - \tfrac{29}{2}\tau + \tfrac{87}{8} = \tfrac{1}{8}(9 + 12\tau - 5\tau^2) = \tfrac{1}{8}(3-\tau)(3+5\tau).$$

這是一條開口向下的拋物線，頂點位於 $\tau = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$，落在 $[\frac{3}{4}, 3]$ 之內。（等價地，當兩人速率相等時，差距便停止擴大：$16 - \frac{5}{4}\tau = 14.5$。）在該處

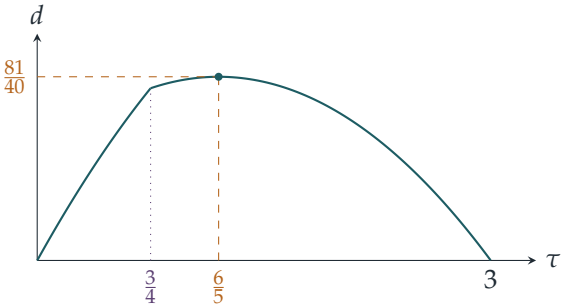
$$d\left(\tfrac{6}{5}\right) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{9}{5} \cdot 9 = \tfrac{81}{40}.$$

由因式分解後的形式可見，$d \geq 0$ 在整個區間上成立，並在終點降至 0，這是必然的。

比較兩段的結果，$\frac{81}{40} = 2.025 > \frac{243}{128} \approx 1.898$。所以兩名跑手之間的最大距離是

$$\boxed{\tfrac{81}{40}\ \text{km} = 2.025\ \text{km}},$$

在開賽後 1.2 小時（72 分鐘）達到，當時第二名參賽者領先。



驗算

- 兩名跑手都在 $\tau = 3$ 時衝線，而公式給出 $d(3) = 0$，這是必然的。
- 第二段的最大值恰好出現在兩人速率相等（同為 14.5）之時，這正是差距停止擴大的自然條件。
- 數值驗證：在一組細密的 t 值上解這條關於 T 的二次方程，得出最小的 T 為 3.000，出現在 $t = 0.75$；在 $[0, 3]$ 內的 300 000 個時刻計算 d，得出最大值為 2.025，出現在 $\tau = 1.2$，並且 $d \geq 0$ 始終成立。

常見錯誤

- 直接套用第一名參賽者的最短時間方案，卻沒有留意到正是「跑步時間為 3 小時」這個條件確定了 $t = \frac{3}{4}$。
- 只在轉折點 $\tau = \frac{3}{4}$ 處求最大值：轉換速度之後差距仍會繼續擴大，因為直到 $\tau = \frac{6}{5}$ 之前，第二名跑手的速率仍然高於 14.5。
- 把第二名跑手所跑的距離寫成 $16\tau - k\tau^2$，忘記了對線性遞減的速率積分時所產生的 $\frac{1}{2}$。

STEP 之外

第一部分是在約束條件下求最優值（optimisation），而約束是由 $F(t,T)=0$ 以隱式給出的。提出「對哪些 T，解 t 才存在？」這個問題，正是隱函數定理（implicit function theorem）背後的想法，更一般地說，也是拉格朗日乘數（Lagrange multipliers）背後的想法：在最優點處，約束的等高線（level curve）滿足 $\partial F/\partial t=0$，而這正是本題中的重根條件。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）全書以微積分處理運動學（kinematics），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則有更多 STEP 風格的最優化題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。