詳細解答

STEP II 2002，第 1 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2002，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s2-q1

關鍵思路

倍角公式（double-angle formula）把 $1-\cos 2\theta$ 化為 $2\sin^2\theta$，而 $\operatorname{cosec}^2\theta$ 是一眼就能積分的函數。題目建議的代換（substitution）$x=\sin 2\theta$ 是特意設計的，使 $\sqrt{1-x^2}$ 變成 $\cos 2\theta$，從而把第二個積分（integral）拉回第一個積分。至於最後一個積分，積分限（limits）1 和 $2/\sqrt{3}$ 正是積分限 1 和 $\sqrt{3}/2$ 的倒數（reciprocal），這強烈暗示應該試用 $y=1/x$。

解答

第一個積分

由於 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$，我們有 $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$，它在 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 上為正，所以被積函數（integrand）在該區間上性質良好。利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cot\theta) = -\operatorname{cosec}^2\theta$，

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\Big[-\cot\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cot\tfrac{\pi}{6} - \cot\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

正如所求。

第二個積分

設 $x=\sin 2\theta$，則 $\mathrm{d}x = 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$。當 $\theta=\frac{1}{6}\pi$ 時，$x=\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$；當 $\theta=\frac{1}{4}\pi$ 時，$x=\sin\frac{1}{2}\pi=1$。當 θ 走遍 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 時，x 由 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 穩定地遞增至 1。

想一想 $\sqrt{1-x^2}$ 等於 $\cos 2\theta$，還是等於 $-\cos 2\theta$？

我們有 $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta} = |\cos 2\theta|$。在我們的範圍內 $2\theta \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$，此處 $\cos 2\theta \geq 0$，所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos 2\theta$。因此

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

為了引入第一個積分，把分子用分母來表示：

$$\frac{\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{1-(1-\cos 2\theta)}{1-\cos 2\theta} = \frac{1}{1-\cos 2\theta} - 1.$$

於是，利用第一個結果，

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta - 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

正如所求。

最後一個積分

設 $y = 1/x$，則 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$。當 $y = 1$ 時，$x = 1$；當 $y = 2/\sqrt{3}$ 時，$x = \sqrt{3}/2$。在這個範圍內 $x > 0$，所以

$$\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$y\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

想一想 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$ 中的負號到哪裏去了？

這個代換把積分限的次序顛倒了，把它們調換回來時正好抵銷了負號：

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{y\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)}\,\mathrm{d}y &= \int_{1}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

x^2 這個因子剛好完全約去，這正是分母中要多放一個因子 y 的原因。

驗算

- 第二個和第三個積分的被積函數都是正的，所以答案必須為正。事實上 $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}\approx 0.73205-0.52360=0.20845$。
- 對三個積分分別使用辛普森法則（Simpson's rule），第一個得 $0.366025\ldots$（與 $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ 吻合），第二個和第三個得 $0.208452\ldots$（與 $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}$ 吻合）。
- 粗略估算：在第二個積分中，區間的長度為 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134$，而被積函數由 2（在 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 處）下降至 1（在 $x=1$ 處），所以積分值應介乎 0.134 與 0.268 之間。結果確實如此。

常見錯誤

- 沒有檢查 $\cos 2\theta$ 在該範圍內的正負號，就寫下 $\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\cos 2\theta$。
- 忘記更改積分限，或在 $y=1/x$ 令積分限次序顛倒時漏掉負號。
- 把 $\left[-\cot\theta\right]$ 算成 $\cot\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{6}$，這樣得出的數值大小正確，但正負號錯了。

STEP 之外

最後一部分是一個普遍原則的小例子：代換是一種變數變換（change of variables），可以把一個積分準確地對應到另一個積分上，而留意到積分限互為倒數，就是 $y=1/x$ 能夠奏效的可靠提示。在大學的第一門分析（analysis）課程中，代換法會由鏈式法則（chain rule）和微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）嚴格地推導出來，並要小心留意代換在何處單調（monotonic）、被積函數在何處連續（continuous），這些正是我們在這裏檢查過的條件。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門教科書）對這些運算背後的理論有清晰的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。