詳細解答

STEP I 2002，第 9 題

力學 • 斜面上的傾倒

STEP I 2002，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

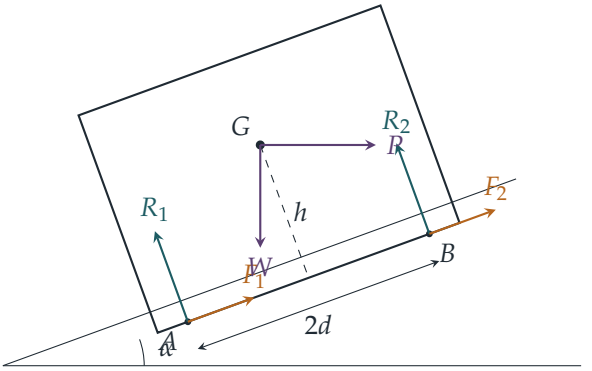
step.maths.org/questions/02-s1-q9

關鍵思路

貨車是處於平衡（equilibrium）狀態的剛體（rigid body），所以我們有三條方程：沿斜面方向分解力、沿垂直於斜面的方向分解力，以及取力矩（moments）。繞 G 取力矩是聰明的選擇，因為重量和 P 都通過 G，兩者一併消失，只剩下車輪上的力。這一條方程把兩個法向反作用力（normal reaction）之差與總摩擦力（friction）聯繫起來，幾乎包辦了全部工作。於是「不翻倒」的意思不過是：兩個法向反作用力都不是負數。

解答

我們把貨車視為剛體，其車輪與斜面在兩點接觸，即 A（較低）和 B（較高），兩點相距 $2d$。設 A 處的法向反作用力為 R_1，B 處的為 R_2，並設摩擦力為 F_1 和 F_2，兩者均以沿斜面向上為正（任何一個最後都可能是負數）。我們假設摩擦力足以防止滑動；題目只關乎翻倒。如圖所示，P 是水平的，指向斜面，所以它有沿斜面向上的分量 $P\cos\alpha$，以及壓向斜面的分量 $P\sin\alpha$。



沿垂直於斜面的方向和沿斜面方向分解力（以沿斜面向上為正）：

$$R_1 + R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha, \tag{1}$$

$$F_1 + F_2 = W\sin\alpha - P\cos\alpha. \tag{2}$$

現在繞 G 取力矩。重量和 P 的作用線都通過 G，所以它們沒有任何貢獻。每個法向反作用力與 G 的垂直距離為 d，而每個摩擦力沿斜面作用，與 G 的垂直距離為 h。以逆時針方向為正（如圖所示，斜面向右上升），R_2 使貨車繞 G 逆時針轉動，R_1 使它順時針轉動，而沿斜面向上的摩擦力作用於 G 的下方，使它逆時針轉動。所以

$$d(R_2 - R_1) + h(F_1 + F_2) = 0. \tag{3}$$

第 (i) 部分

若 $R_1 = R_2$，方程 (3) 變成 $h(F_1 + F_2) = 0$。由於 $h > 0$，可得 $F_1 + F_2 = 0$：摩擦力之和為零，正是所要證明的。

（由 (2) 可知，這種情況恰好在 $P = W\tan\alpha$ 時出現：P 沿斜面向上的部分剛好抵銷重量沿斜面向下的部分，所以斜面無須提供任何淨摩擦力。）

第 (ii) 部分

把 (2) 代入 (3)，

$$R_2 - R_1 = \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

再與 (1) 結合，

$$2R_1 = W\cos\alpha + P\sin\alpha - \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

$$2R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha + \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha).$$

? **想一想** 用這些方程來說，「不翻倒」是甚麼意思？

地面可以推車輪，卻不能拉住它，所以每個法向反作用力都必須滿足 $R \geq 0$。假如 R_2 的公式算出來是負數，較高的車輪就要靠外力壓住才行；實際上它會離地，貨車繞 A 轉動。同樣，$R_1 < 0$ 表示繞 B 轉動。所以貨車保持直立，當且僅當 $R_1 \geq 0$ 且 $R_2 \geq 0$。

以下我們一直使用 $\frac{d}{h} = \tan\beta$，其中 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$，並且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$。

較高的車輪不離地（$R_2 \geq 0$）。把 $2R_2 \geq 0$ 乘以 $d/h > 0$，

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) + P\cos\alpha - W\sin\alpha \geq 0.$$

乘以 $\cos\beta > 0$ 並整理各項，

$$P(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \geq W(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta),$$

即

$$P\cos(\alpha-\beta) \geq W\sin(\alpha-\beta).$$

由於 $-\frac{\pi}{2} < \alpha-\beta < \frac{\pi}{2}$，我們有 $\cos(\alpha-\beta) > 0$，所以可以除以它而無須把不等式（inequality）的方向倒轉：

$$P \geq W\tan(\alpha-\beta).$$

較低的車輪不離地（$R_1 \geq 0$）。同樣地，由 $2R_1 \geq 0$ 可得

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) - P\cos\alpha + W\sin\alpha \geq 0,$$

再乘以 $\cos\beta > 0$，

$$P(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \leq W(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

即

$$P\cos(\alpha+\beta) \leq W\sin(\alpha+\beta).$$

只要 $\alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$（題目給出的答案其實暗中假設了這一點，否則 $\tan(\alpha+\beta)$ 是負數或者沒有定義），便有 $\cos(\alpha+\beta) > 0$，相除後得

$$P \leq W\tan(\alpha+\beta).$$

若 $\alpha+\beta \geq \frac{\pi}{2}$，則當 $P \geq 0$ 時左邊 ≤ 0，而右邊是正數，所以指向斜面的水平推力無論多大，都不能令貨車繞較高的車輪翻倒。

把兩個條件合起來，貨車不翻倒當且僅當

$$W\tan(\alpha-\beta) \leq P \leq W\tan(\alpha+\beta),$$

這就是所要求的結果。推力太小，貨車會繞 A 向斜面下方翻倒；推力太大，它會繞 B 被推得向斜面上方翻倒。

驗算

- 幾何圖像。重量和 P 合成為通過 G 的單一個力，它與鉛垂線成角 θ，其中 $\tan\theta = P/W$。當這個合力（resultant）通過車輪的接觸點時，貨車便處於即將翻倒的狀態。直線 GA 與斜面的法線成角 β，而法線與鉛垂線成角 α，所以合力在 $\theta = \alpha-\beta$ 時通過 A，在 $\theta = \alpha+\beta$ 時通過 B。這正好就是區間的兩個端點。
- 沒有斜坡。取 $\alpha = 0$，條件變成 $|P| \leq Wd/h$：這正是大家熟悉的條件，即平地上的箱子在高度 h 處受橫向推力而不翻倒的條件。
- 數值。取 $W = 3$、$\alpha = 0.4$、$d = 1$、$h = 1.5$，區間為 $-0.571 \leq P \leq 4.551$。對 20 000 個隨機配置直接檢查 $R_1, R_2 \geq 0$ 並與這個區間比對，結果完全吻合，而且在下端有 $R_2 = 0$，在上端有 $R_1 = 0$。

常見錯誤

- 繞車輪而不是繞 G 取力矩。這樣做也行得通，但重量和 P 的力臂（moment arm）就變得很麻煩，正負號也容易出錯。
- 忘記摩擦力對 G 有力矩。摩擦力作用於斜面上，在 G 下方距離 h 處，h 正是由此進入答案的。
- 沒有檢查 $\cos(\alpha \pm \beta)$ 的正負號就除以它，而不等式的方向正是由這個正負號決定的。

STEP 之外

車輪與地面之間的摩擦力是*靜不定*（statically indeterminate）的：平衡條件只能確定 $F_1 + F_2$，永遠不能分別確定 F_1 和 F_2，要知道兩者如何分配，就需要一個描述輪胎如何變形的模型。工程師經常遇到這種情況，例如支承數目多於嚴格所需的結構。上面的幾何驗算，用的就是*合力作用線*（line of action of the resultant）和支承多邊形（support polygon）的想法，步行機械人和疊起的積木的穩定性，背後也是同一個道理。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）仔細講解了剛體靜力學（statics）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。