詳細解答

STEP I 2002，第 8 題

純數學 • 複利貸款

> **STEP I 2002，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q8

關鍵思路

先寫下一年之內發生的事：債務先乘以因子 $1+\alpha$，然後減去還款額。把這個一步遞推關係（recurrence）逐層展開，便可看出每筆還款 R_k 到第 n 年年底時「值」$(1+\alpha)^{n-k}R_k$，因為它令這麼多的利息無從累積。其餘的一切都只是等比級數（geometric series）。至於最後的近似值，用二項式定理（binomial theorem）展開 $1+\alpha$ 的冪，保留剛好足夠的項即可。

解答

C_{n+1} 的一般公式

在第 k 年年底，加上利息後債務 C_k 變成 $(1+\alpha)C_k$，然後償還 R_k。餘下的就是第 $k+1$ 年年初的債務：

$$C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k.$$

重複應用這條關係式，

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (1+\alpha)C_n - R_n \\ &= (1+\alpha)^2 C_{n-1} - (1+\alpha)R_{n-1} - R_n \\ &\vdots \\ &= (1+\alpha)^n C_1 - (1+\alpha)^{n-1}R_1 - (1+\alpha)^{n-2}R_2 - \cdots - R_n, \end{aligned}$$

因此，由於 $C_1 = C$，

$$\boxed{C_{n+1} = (1+\alpha)^n C - \sum_{k=1}^{n}(1+\alpha)^{n-k}R_k}.$$

（要令這個論證嚴謹，可驗證它在 $n=1$ 時成立，此時它說的是 $C_2=(1+\alpha)C-R_1$；並驗證若它對 n 成立，則乘以 $1+\alpha$ 再減去 R_{n+1} 便得出 $n+1$ 的情況。）

還款額 $R_k=(1+\alpha)^k r$

在 N 年內還清貸款，即是 $C_{N+1}=0$。當 $R_k=(1+\alpha)^k r$ 時，和式中的每一項都相同：

$$(1+\alpha)^{N-k}R_k=(1+\alpha)^{N-k}(1+\alpha)^k r=(1+\alpha)^N r.$$

因此

$$0=C_{N+1}=(1+\alpha)^N C-N(1+\alpha)^N r=(1+\alpha)^N\,(C-Nr).$$

由於 $(1+\alpha)^N\neq 0$，我們得到 $C=Nr$，即 $r=C/N$，正是所求。

這個結果合乎情理：第 k 筆還款是「以今天的幣值計」的 C/N，再加上 k 年的利息增長，所以你合共償還的是本金（principal）C，另加恰好是它所生的利息。

等額還款 R

現在對每個 k 都有 $R_k=R$，而 $C_{N+1}=0$ 給出

$$(1+\alpha)^N C=R\sum_{k=1}^{N}(1+\alpha)^{N-k}=R(1+(1+\alpha)+\cdots+(1+\alpha)^{N-1}).$$

括號內是一個等比級數，首項為 1，公比為 $1+\alpha$，共 N 項，所以（因為 $\alpha>0$，公比不等於 1）它等於

$$\frac{(1+\alpha)^N-1}{(1+\alpha)-1}=\frac{(1+\alpha)^N-1}{\alpha}.$$

於是 $(1+\alpha)^N C=R\,\dfrac{(1+\alpha)^N-1}{\alpha}$，整理後得

$$\frac{R}{C}=\frac{\alpha(1+\alpha)^N}{(1+\alpha)^N-1},$$

這就是所求的結果。

$\alpha=\frac{1}{50}$、$N=4$ 的情況

> ? **想一想** 二項展開式應該保留多少項？為甚麼分子需要的項數比分母少？

分母 $(1+\alpha)^4-1$ 由 α 的一階項開始，而分子 $\alpha(1+\alpha)^4$ 則是 α 乘以一個由 1 開始的式子。所以約去因子 α 之後，分子是 $(1+\alpha)^4$，分母是 $((1+\alpha)^4-1)/\alpha$。要令兩者都準確至 α 的一階，分子需要 $(1+\alpha)^4\approx 1+4\alpha$，但分母需要 $(1+\alpha)^4\approx 1+4\alpha+6\alpha^2$（除以 α 之後，$6\alpha^2$ 變成 6α）。因此

$$\frac{R}{C}=\frac{(1+\alpha)^4}{((1+\alpha)^4-1)/\alpha}=\frac{1+4\alpha+6\alpha^2+\ldots}{4+6\alpha+4\alpha^2+\alpha^3}\approx\frac{1+4\alpha}{4+6\alpha}.$$

代入 $\alpha = \frac{1}{50}$，

$$\frac{R}{C} \approx \frac{1+\frac{4}{50}}{4+\frac{6}{50}} = \frac{54}{206} = \frac{27}{103},$$

正是所求。我們捨去的項，相對大小約為 α^2，在這裏只是百分之一的一小部分。

驗算

- 當 $N = 1$ 時，公式給出 $R/C = 1+\alpha$：借入 C，連同一年的利息一併償還。正確。
- 當 $\alpha \to 0$ 時，$(1+\alpha)^N - 1 \approx N\alpha$，所以 $R/C \to 1/N$：沒有利息時，每年只需償還 C/N。這亦與 $r = C/N$ 吻合。
- 準確值是 $R/C = \dfrac{6765201}{25760050} \approx 0.26262$，而 $27/103 \approx 0.26214$；兩者相差約 0.2%。取 $R = 0.26262\,C$，把債務逐年推算下去，四年後（在捨入誤差之內）再無欠款。

常見錯誤

- 弄錯和式中的指數：R_k 是在第 k 年年底償還的，所以它少計的利息是往後的 $n-k$ 年，而不是 $n-k+1$ 年。
- 在分母中也用 $(1+\alpha)^4 \approx 1+4\alpha$ 作近似：這樣會得出 $R/C \approx 27/100$，是一個較粗略的答案，與題目所求不符。

STEP 之外

$\sum(1+\alpha)^{-k}R_k$ 這個量是各筆還款的*現值*（present value），而貸款剛好還清，正是還款的現值等於借款額之時；R 的公式就是標準的年金（annuity，即按揭）公式。像 $C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k$ 這樣的遞推關係是一階線性差分方程（first-order linear difference equation），可說是微分方程（differential equation）$y' = \alpha y - R(t)$ 的離散版近親，兩者都可用同一個「積分因子」（integrating factor）的想法求解。如想多做一些這類把代數與建模（modelling）結合起來的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。