詳細解答

STEP I 2002，第 7 題

純數學 • 三角函數積分

> **STEP I 2002，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q7

關鍵思路

單獨來看，I 和 J 都不易處理，但兩者之和與兩者之差卻都很好計算。把它們相加，分母（denominator）便出現在分子（numerator）上，於是被積函數（integrand）就是 1。把它們相減，分子上出現的是分母的導數（derivative），於是積分是一個對數（logarithm）。後面兩個積分用的是同一技巧的較一般形式：把分子拆成分母的某個倍數，加上分母的導數的某個倍數。

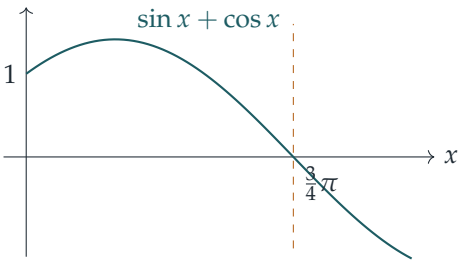
解答

主要結果

首先，為甚麼要對 a 加上限制？我們可以寫成

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right),$$

它在 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ 時為正，並在 $x = \frac{3}{4}\pi$ 處首次等於零。因此當 $0 \le a < \frac{3}{4}\pi$ 時，分母在整個 $[0, a]$ 上都是正數。這樣兩個積分都是普通的積分，而下面取對數的也是一個正數。



把兩個積分相加，

$$I + J = \int_0^a \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a.$$

把它們相減，

$$I - J = \int_0^a \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

分子 $\cos x - \sin x$ 正好是分母 $\sin x + \cos x$ 的導數，所以被積函數具有 $f'(x)/f(x)$ 的形式，其中在 $[0, a]$ 上 $f > 0$。因此

$$I - J = \Big[\ln(\sin x + \cos x)\Big]_0^a = \ln(\sin a + \cos a) - \ln 1 = \ln(\sin a + \cos a).$$

把兩個結果相加，得

$$2I = a + \ln(\sin a + \cos a),$$

這正是所要求的結果。（把兩者相減，還可以順帶得到 $2J = a - \ln(\sin a + \cos a)$。）

第 (i) 部分

由於 $p, q > 0$，而 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上都非負，且不會同時為零，所以分母 $D(x) = p\sin x + q\cos x$ 在該區間上是正數。它的導數是 $D'(x) = p\cos x - q\sin x$。

想一想 當分母帶有係數 p 和 q 時，「考慮 $I + J$ 與 $I - J$」這個做法應該怎樣推廣？

先前取和與差之所以奏效，是因為兩個分子相加得出分母，相減則得出分母的導數。所以現在我們要找常數 A 和 B，使得

$$\cos x = A\,(p\sin x + q\cos x) + B\,(p\cos x - q\sin x) \qquad \text{對所有} x.$$

比較 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的係數：

$$pA - qB = 0, \qquad qA + pB = 1.$$

由第一式得 $B = pA/q$；代入第二式得 $qA + p^2A/q = 1$，所以

$$A = \frac{q}{p^2 + q^2}, \qquad B = \frac{p}{p^2 + q^2}.$$

現在積分拆成容易的一部分和對數的一部分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(A + B\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}A + B\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}A + B\ln\frac{p}{q},\end{aligned}$$

其中用到 $D(\frac{\pi}{2}) = p$ 和 $D(0) = q$，兩者皆為正數。因此

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2}\pi q + p\ln(p/q)}{p^2 + q^2}.$$

第 (ii) 部分

現在分母是 $D(x) = 3\sin x + 4\cos x + 25$，而 $D'(x) = 3\cos x - 4\sin x$。分母是正數，因為 $|3\sin x + 4\cos x| \le 5 < 25$。$D$ 中有常數 25，表示我們還須令常數項相符，所以要找 A 和 B，使得

$$\cos x + 4 = A\,(3\sin x + 4\cos x + 25) + B\,(3\cos x - 4\sin x).$$

比較係數：

$$\sin x:\ 3A - 4B = 0, \qquad \cos x:\ 4A + 3B = 1, \qquad \text{常數項}:\ 25A = 4.$$

由前兩式得 $A = \frac{4}{25}$ 和 $B = \frac{3}{25}$，而常數項的方程 $25 \cdot \frac{4}{25} = 4$ 也同樣成立。三條方程只有兩個未知數，這並非必然成立：分子中的「$+4$」是特意選來令它成立的。所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 25}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{25}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{25}\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29},\end{aligned}$$

因為 $D(\frac{\pi}{2}) = 3 + 25 = 28$ 而 $D(0) = 4 + 25 = 29$。

驗算

- 取 $p = q = 1$ 時，第 (i) 部分應與主要結果在 $a = \frac{\pi}{2}$ 時的情況一致；後者給出 $2I = \frac{\pi}{2} + \ln 1$，所以 $I = \frac{\pi}{4}$。公式給出 $\frac{\pi/2+0}{2} = \frac{\pi}{4}$。兩者吻合。
- 當 $a \to \frac{3}{4}\pi$ 時，$\ln(\sin a + \cos a) \to -\infty$。這與以下事實相符：在分母快要變成零之前，$I$ 的被積函數是絕對值很大的負數，因為在那裏 $\cos x < 0$。
- 以數值計算，第 (ii) 部分是 $\frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29} \approx 0.247116$，而對該積分使用辛普森法則（Simpson's rule）所得的結果與它吻合至小數點後十二位。主要結果和第 (i) 部分也分別對 200 個隨機的 a 值，以及隨機的 p 和 q 值，與數值積分（quadrature）的結果吻合。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分得出 $\ln(q/p)$ 而不是 $\ln(p/q)$。在上限 $\frac{\pi}{2}$ 處，留下來的是 sin 那一項，所以得出 p。
- 在第 (ii) 部分忘記常數項，只比較 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的係數。這樣做碰巧行得通，但你應該加以驗證，而不是假定它成立。

STEP 之外

把分子寫成「A 乘以分母，加上 B 乘以分母的導數」，其實是一小段線性代數（linear algebra）。函數 $\sin x$ 和 $\cos x$ 張成一個二維空間，而只要 $p^2 + q^2 \neq 0$，D 和 D' 就構成這個空間的另一組基（basis）。同一個想法，即找出合適的基來展開，也是部分分式（partial fractions）和求解微分方程（differential equations）的待定係數法（method of undetermined coefficients）背後的原理，你會在大學一年級的數學方法課程中學到這些內容。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中還有更多可以用這類對稱技巧解決的積分。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。