詳細解答

STEP I 2002，第 6 題

純數學 • 角錐的幾何

STEP I 2002，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

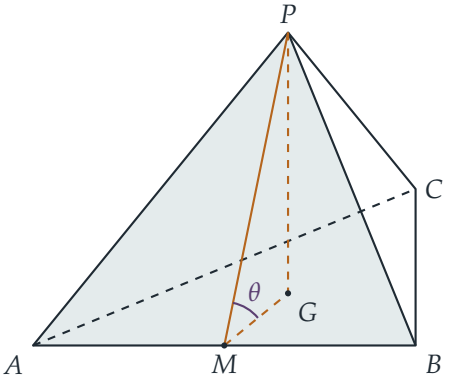
step.maths.org/questions/02-s1-q6

關鍵思路

根據對稱性，頂點位於等邊底面中心的正上方，因此只需用一次畢氏定理（Pythagoras' theorem）便可求得高。知道體積之後，我們根本不必直接求新的高：無論哪一個面放在地上，體積都是一樣的，所以 $V = \frac{1}{3} \times$ (新底面的面積) $\times h$。最後一部分所求的角，是兩個面沿公共棱所成的夾角；要看清楚這個角，最簡潔的方法是考慮通過頂點並垂直於該棱的截面（cross-section）。

解答

把底面記為 ABC，邊長為 a，頂點記為 P，且 $PA = PB = PC = b$。設 G 為 ABC 的中心，M 為 AB 的中點。



體積

設 H 為 P 在底面之上的高度，F 為由 P 所作垂線的垂足。直角三角形 PFA、PFB、PFC 有公共邊 $PF = H$，而斜邊均為 b，所以

$$FA = FB = FC = \sqrt{b^2 - H^2}.$$

因此 F 與三個頂點等距：它是 ABC 的外心（circumcentre），而等邊三角形的外心就是其中心 G。ABC 的中線（median）長度為 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，而 G 位於中線上由頂點起計三分之二的位置，所以 $GA = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$。在三角形 PGA 中運用畢氏定理，得

$$H^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{3b^2 - a^2}{3}.$$

底面的面積為 $\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12}a^2\left(3b^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

正是所要求的結果。（這種形狀的棱錐只在 $3b^2 > a^2$ 時才存在，而這正好是上式為正實數的條件。）

新的高

現在把面 PAB 放在地上。它是等腰三角形，$PA = PB = b$ 而 $AB = a$，所以 PM 垂直於 AB；在三角形 PMA 中運用畢氏定理，得

$$PM^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4b^2 - a^2}{4}, \qquad \text{面積}PAB = \frac{1}{2}a\cdot PM = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

想一想 要求 h，我們真的需要找出新的最高頂點的位置嗎？

不需要。立體本身沒有改變，所以它的體積仍然是 V；而體積公式對任何一個面作為底面都成立，只要高是垂直於該面量度的。所以

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}\cdot h.$$

與第一部分的結果比較，

$$\frac{a}{12}\sqrt{4b^2 - a^2}\,h = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2} \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$

兩邊平方得

$$h^2 = \frac{a^2(3b^2 - a^2)}{4b^2 - a^2},$$

正是所要求的結果。這裏 $4b^2 - a^2 > 0$，因為 $4b^2 > 3b^2 > a^2$。

等邊面的傾角

在新的位置，地面就是 PAB 所在的平面，而等邊面 ABC 與它沿棱 AB 相交。兩個平面之間的夾角，是指在兩個平面上各取一條直線，於同一點垂直於公共棱，這兩條直線所成的角。在 M 點，面 PAB 上的直線 MP 垂直於 AB（因為 PAB 是等腰三角形），面 ABC 上的直線 MC 亦垂直於 AB（因為 ABC 是等邊三角形），而且 G 在 MC 上。所以所求的角是 $\theta = \angle PMC = \angle PMG$。

三角形 PMG 在 G 處為直角，因為 PG 垂直於整個底面。此外，GM 是中線的三分之一，$GM = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{2\sqrt{3}}$。因此

$$\tan\theta = \frac{PG}{GM} = \frac{\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{a} = \frac{2\sqrt{3b^2-a^2}}{a},$$

所以等邊三角形與水平面之間的夾角為

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3b^2-a^2}}{a}\right).$$

這個角是銳角，因為 G 位於底面之內，所以它確實是兩個平面之間的夾角，而不是其補角。

另一個等價的做法是利用新的高：頂點 C 在地面之上的高度為 h，而沿着該面量度，它與棱 AB 的距離為 $MC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $\sin\theta = h\big/\frac{\sqrt{3}}{2}a$，由此得

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{3(4b^2-a^2)}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{3(4b^2-a^2)}},$$

與上面 $\tan\theta$ 的值吻合。

驗算

對於正四面體（regular tetrahedron），$a = b = 1$：公式給出 $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$，$h^2 = \frac{2}{3}$（與原來的高相同，根據對稱性亦必然如此），以及 $\cos\theta = \frac{1}{3}$，即大家熟悉的正四面體二面角（dihedral angle）$\theta \approx 70.53°$。當 $b \to a/\sqrt{3}$ 時，棱錐變得扁平，$\theta \to 0$；當 $b \to \infty$ 時，它變成又高又尖的錐體，$\theta \to 90°$。我們亦用坐標為 20,000 組隨機數對 (a, b) 建構了這個棱錐，並以三重積計算 V，以 C 到平面 PAB 的距離計算 h，以法向量計算 θ；三者均與公式吻合，誤差約為 10^{-13}。例如 $a = 2$、$b = 3$ 給出 $h \approx 1.6956$ 及 $\theta \approx 78.22°$。

常見錯誤

- 把 GA 當作中線的一半，或在需要用外接圓半徑（circumradius）$\frac{a}{\sqrt{3}}$ 的地方用了內切圓半徑（inradius）$\frac{a}{2\sqrt{3}}$（在最後一部分則剛好相反）。

► 量度該面與地面之間的夾角時，用了一條不垂直於公共棱的直線，例如 AC 或 PC。

STEP 之外

以不同的面作底來計算同一個體積，讓我們初次窺見這樣一個想法：體積並不取決於我們怎樣切割立體或怎樣擺放它。在大學一年級的課程中，四面體的體積會寫成 $\frac{1}{6}|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$，即一個純量三重積（scalar triple product，亦即一個 3×3 行列式（determinant）），而兩個面之間的夾角就是它們的法向量（normal vector）之間的夾角，我們的數值驗算正是這樣做的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）把行列式作為體積來闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。