詳細解答

STEP I 2002，第 5 題

純數學 • 多項式的整數根

> **STEP I 2002，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q5

關鍵思路

寫成一次因式（linear factor）乘積的多項式（polynomial），在特殊點上很容易求值：代入 $x = 0$、$x = 1$ 或 $x = -1$，因式分解後的形式就變成 k_i、$k_i + 1$ 或 $k_i - 1$ 的乘積，而展開後的形式則給出係數（coefficient）之和。對於題中的四次多項式（quartic），這些值都是固定的整數，而根（root）是整數就意味着每個 $k_i \pm 1$ 都必須是某個已知數的因數（divisor）。把這些數分解成質因數之後，可供選擇的餘地就所剩無幾。

解答

三個恆等式

由於 $f(x)$ 的兩個表達式是同一個多項式，它們在 x 的每一個值上都相等。

代入 $x = 0$：展開式給出 $f(0) = a_n$，因為其餘各項都含有因子 x。因式分解後的形式給出 $f(0) = k_1 k_2 \cdots k_n$。因此

$$k_1 k_2 \cdots k_n = a_n.$$

代入 $x = 1$：x 的每個冪都變成 1，所以展開式給出 $f(1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，而因式分解後的形式給出 $(1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n)$。因此

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_n + 1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

正如所求。

代入 $x = -1$：因式分解後的形式給出 $(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1)$。在展開式中，$a_j x^{n-j}$ 一項變成 $(-1)^{n-j} a_j = (-1)^n (-1)^j a_j$（這裏用到 $(-1)^{-j} = (-1)^j$），所以

$$(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1) = (-1)^n (1 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n).$$

當 n 為偶數時，這就是 $1 - a_1 + a_2 - \cdots + a_n$；當 n 為奇數時，每個符號都要反轉。

四次多項式

把這個四次多項式寫成 $f(x) = (x + k_1)(x + k_2)(x + k_3)(x + k_4)$，於是它的根是 $-k_1, \ldots, -k_4$，而且都是整數。取 $n = 4$ 應用上述恆等式：

$$k_1k_2k_3k_4 = 576 = 2^6 \cdot 3^2,$$
$$(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)(k_4+1) = 1 + 22 + 172 + 552 + 576 = 1323 = 3^3 \cdot 7^2,$$
$$(k_1-1)(k_2-1)(k_3-1)(k_4-1) = 1 - 22 + 172 - 552 + 576 = 175 = 5^2 \cdot 7.$$

每個 k_i 都至少是 2。所有係數都是正數，所以對每個 $x \geq 0$ 都有 $f(x) > 0$；因此每個根都是負數，每個 k_i 都是正整數。此外，沒有任何 k_i 等於 1，否則第三個乘積會是 0 而不是 175。所以對每個 i 都有 $k_i \geq 2$，而 $k_i - 1$ 和 $k_i + 1$ 全都是正整數。

? **想一想** 怎樣把三個乘積化為一張簡短的清單，列出 k_i 的可能值？

每個 $k_i - 1$ 都是 175 的正因數，每個 $k_i + 1$ 都是 1323 的正因數。175 的因數是 $1, 5, 7, 25, 35, 175$，由此得

$$k_i \in \{2, 6, 8, 26, 36, 176\}, \qquad k_i + 1 \in \{3, 7, 9, 27, 37, 177\}.$$

在 $k_i + 1$ 的這些值當中，只有 $3, 7, 9, 27$ 能整除 $1323 = 3^3 \cdot 7^2$（因為 37 是質數，而 $177 = 3 \cdot 59$）。所以每個 k_i 都是 $2, 6, 8, 26$ 其中之一，每個 $k_i + 1$ 都是 $3, 7, 9, 27$ 其中之一。

現在看乘積 $\prod(k_i + 1) = 3^3 \cdot 7^2$。

- 因子 7^2 只能來自等於 7 的因子，所以 $k_i + 1$ 當中恰好有兩個等於 7：有兩個 k_i 是 6。
- 另外兩個因子是取自 $\{3, 9, 27\}$ 的 3 的冪，乘積為 $3^3 = 27$。兩者都至少是 3，所以不可能取 27（否則另一個就要是 1），唯一的選擇是 3×9。所以餘下的 k_i 是 2 和 8。

於是 $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{2, 6, 6, 8\}$。用第一個乘積驗證：$2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 = 576$，正如所求。展開亦可確認：

$$(x + 2)(x + 8) = x^2 + 10x + 16, \qquad (x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36,$$

以及

$$(x^2 + 10x + 16)(x^2 + 12x + 36) = x^4 + 22x^3 + 172x^2 + 552x + 576.$$

所以各根是

$$x = -2, \quad x = -6\text{（重根）}, \quad x = -8.$$

驗算

- 各 k_i 之和是 $2+6+6+8=22$，與 x^3 的係數吻合。
- $f(-6)=1296-4752+6192-3312+576=0$，而 $f'(x)=4x^3+66x^2+344x+552$ 在 $x=-6$ 處同樣等於零，確認 -6 是二重根。
- 用數值快速檢驗這些恆等式：對 $f(x)=(x+2)(x-3)=x^2-x-6$，我們得到 $(2-1)(-3-1)=-4$ 和 $1-(-1)+(-6)=-4$。

常見錯誤

- 在 $x=-1$ 的結果中弄錯符號：當 n 為奇數時，因子 $(-1)^n$ 不能忽略。
- 忘記重根是容許的：一旦在 1323 中見到 7^2，就必定有兩個 k_i 相等。
- 沒有先證明每個 $k_i \geq 2$ 就只列出正因數；正是這一步保證了所有 $k_i \pm 1$ 都是正數。

STEP 之外

這裏的恆等式是韋達定理（Vieta's formulae）的特殊情況；韋達定理把多項式的係數表示為其根的基本對稱函數（elementary symmetric functions）。至於因數的論證，則與有理根定理（rational root theorem）一脈相承，也與高斯（Gauss）關於整係數多項式因式分解的引理（Gauss's lemma）相近，後者你會在環（ring）論的入門課程中遇到。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）對這些想法有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。