詳細解答

STEP I 2002，第 4 題

純數學 • 切線與不等式

> **STEP I 2002，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q4

關鍵思路

一條通過 $(0,1)$ 並在較遠處與曲線相切的直線，在這兩點之間必定位於曲線的下方，因為曲線在該處是凹的（concave），其後才變得平緩。直線下方的區域是一個梯形（trapezium），把它繞 y 軸旋轉會得到一個圓柱體和一個圓錐體，所以毋須用微積分也能輕易求出它的面積和體積。把它們與曲線下方的準確面積和體積比較，便得到那兩個不等式。

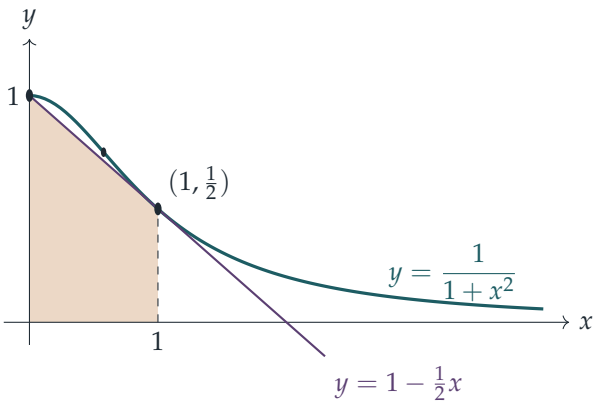
解答

略圖

設 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$。則 $f(0) = 1$，$f(x) > 0$，而且當 $x \to \infty$ 時 $f(x) \to 0$，所以 x 軸是漸近線（asymptote）。求導得

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

所以 $f'(0) = 0$（曲線在 $(0,1)$ 處以水平方向出發），而當 $x > 0$ 時 $f'(x) < 0$，故曲線一直遞減。此外，當 $0 \le x < 1/\sqrt{3}$ 時 $f''(x) < 0$，當 $x > 1/\sqrt{3}$ 時 $f''(x) > 0$，所以在 $(1/\sqrt{3}, \frac{3}{4})$ 有一個拐點（point of inflection）：曲線在 y 軸附近是凹的（向下彎），在較遠處則是凸的（convex）。



陰影部分的梯形是 $0 \le x \le 1$ 時直線下方的區域；它位於曲線下方的區域之內。

直線

直線通過 $(0, f(0)) = (0,1)$，所以它的方程是 $y = 1 + mx$，其中 m 是某個斜率（gradient）。假設它在 $x = a > 0$ 處與曲線相切。在該處必須滿足兩個條件。

它與曲線相交：$1 + ma = \dfrac{1}{1+a^2}$，所以 $ma = -\dfrac{a^2}{1+a^2}$，而由於 $a \neq 0$，

$$m = -\frac{a}{1+a^2}.$$

它的斜率與曲線的斜率相同：$m = f'(a) = -\dfrac{2a}{(1+a^2)^2}$。

令兩式相等，再除以 $-a/(1+a^2)$（因為 $a > 0$，這樣做是容許的），得 $1 = \dfrac{2}{1+a^2}$，所以 $a^2 = 1$，而由於 $a > 0$，故 $a = 1$。於是 $m = -\frac{1}{2}$，直線是

$$y = 1 - \tfrac{1}{2}x,$$

它在 $(1, \frac{1}{2})$ 處與曲線相切。

再無其他交點

把直線減去曲線：

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(2-x)(1+x^2) - 2}{2(1+x^2)} = \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{2(1+x^2)} = -\frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}.$$

這個式子只在 $x = 0$ 或 $x = 1$ 時等於零。所以直線與曲線相交於 $x = 0$ 和切點 $x = 1$（重因式 $(x-1)^2$ 正是相切在代數上的標誌），此外再無其他交點：在 $x \ge 0$ 時沒有，事實上在 x 為負數時也沒有。

我們還可以從中讀出下一步需要的結果。當 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 時，這個式子嚴格小於零，所以

$$0 < 1 - \tfrac{1}{2}x < \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{當} 0 < x < 1. \tag{$*$}$$

（左邊的不等式成立，是因為在 $[0,1]$ 上 $1 - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}$。）所以在 $[0,1]$ 上，除了端點之外，直線嚴格位於曲線下方，正如略圖所示。

$\pi > 3$

把 $(*)$ 在 $[0,1]$ 上積分。兩個函數都是連續的，而且在開區間上曲線嚴格位於直線上方，所以積分之後不等式仍然是嚴格不等式：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

左邊是 $\frac{\pi}{4}$（即 $[\arctan x]_0^1$）。右邊是陰影梯形的面積，梯形的兩條平行邊長為 1 和 $\frac{1}{2}$，寬為 1，所以面積是 $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$。因此 $\frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$，即

$$\pi > 3.$$

$\ln 2 > 2/3$

現在把同樣的兩個區域（$0 \leq x \leq 1$）繞 y 軸旋轉 2π。根據 $(*)$，梯形位於曲線下方的區域之內，所以它的旋轉體（solid of revolution）位於另一個旋轉體之內，體積也較小。

> **想一想** 如果曲線是以 x 表示 y 的形式給出，我們怎樣求繞 y 軸旋轉的旋轉體體積？

使用圓柱殼法（cylindrical shells）：位於 x 處、寬度為 δx、高度為 y 的窄條，旋轉後掃出一個體積約為 $2\pi x\, y\, \delta x$ 的薄殼，所以體積是 $\int_0^1 2\pi x\, y\, \mathrm{d}x$。（另一個方法是沿水平方向切片；見「驗算」。）

對於曲線，

$$V_{\text{curve}} = \int_0^1 \frac{2\pi x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi[\ln(1+x^2)]_0^1 = \pi \ln 2,$$

因為分子 $2x$ 是分母的導數。

對於直線，旋轉體是一個半徑為 1、高為 $\frac{1}{2}$ 的圓柱體（來自梯形在 $y = \frac{1}{2}$ 以下的部分），上面再加一個半徑為 1、高為 $\frac{1}{2}$ 的圓錐體（來自其上方的三角形）。所以

$$V_{\text{line}} = \pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

用圓柱殼法驗算：$\int_0^1 2\pi x(1 - \frac{1}{2}x)\mathrm{d}x = 2\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{2\pi}{3}$。

被積函數 $2\pi x(\frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x}{2})$ 是連續的，在 $[0,1]$ 上非負，而且根據 $(*)$ 在 $(0,1)$ 上嚴格為正，所以 $V_{\text{curve}} > V_{\text{line}}$：

$$\pi \ln 2 > \frac{2\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad \ln 2 > \frac{2}{3},$$

這正是所要證明的。

驗算

- 以數值計算，$\pi/4 \approx 0.7854 > 0.75$，$\ln 2 \approx 0.6931 > 0.6667$，所以兩個不等式都成立，而且兩者都不算寬鬆。
- 改為沿水平方向切片：當 $\frac{1}{2} \le y \le 1$ 時，曲線滿足 $x^2 = \frac{1}{y} - 1$，所以體積是圓柱體的 $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}$ 加上 $\int_{1/2}^{1} \pi\left(\frac{1}{y} - 1\right)\mathrm{d}y = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$，同樣得到 $\pi \ln 2$。
- 快速檢驗因式分解：在 $x = 2$ 時，直線給出 0，曲線給出 $\frac{1}{5}$，兩者相差 $-\frac{1}{5}$；公式給出 $-\frac{2\cdot 1}{2\cdot 5} = -\frac{1}{5}$。

常見錯誤

- 求出一般點上的切線，卻忘記了切線須通過 $(0,1)$ 這個條件（或者反過來）：兩個條件都要用上，才能確定 a。
- 止步於「$\ge$」：要得到嚴格不等式，直線必須在某個區間上嚴格位於曲線下方，而這正是因式 $x(x-1)^2$ 所提供的。
- 誤把區域繞 x 軸旋轉，這樣會得到 $\int \pi y^2 \,\mathrm{d}x$ 和不同的數值。

STEP 之外

這個論證是一個比較原理（comparison principle）：如果在某個區間上 $g \le h$，在某處有嚴格不等式成立，而且兩者都連續，那麼 $\int g < \int h$。把「在某處嚴格成立」說得精確，是大學第一門分析課程中的典型習題，在那裏積分是透過上和與下和（upper and lower sums）來定義的。以簡單圖形的面積來估計 π 的上下界，可以追溯至阿基米德（Archimedes），而這道題還有精密得多的版本（例如 $\int_0^1 x^4(1-x)^4/(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$），值得查閱一下。至於分析方面，可以試讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。