詳細解答

STEP I 2002，第 3 題

純數學 • 以微積分證明不等式

> **STEP I 2002，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q3

關鍵思路

把兩個平方根記作 $\sqrt{P}$ 和 $\sqrt{Q}$。根號下的兩個量關係密切：$P+Q=a^2+b^2$ 是常數，而且它們的導數（derivative）大小相等、正負相反。因此 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ 可以乾淨利落地因式分解（factorise），其正負只由一個三角因子決定。只要知道 y 的最大值和最小值，那個雙重不等式（double inequality）不過就是「最小值 $\le y \le$ 最大值」，而第一部分則告訴我們兩端的大小次序正確。

解答

第一個不等式

展開得

$$2a^2+2b^2-(a+b)^2=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\ge 0,$$

所以 $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$，等號成立當且僅當 $a=b$。

駐點

設 $c=\cos\theta$，$s=\sin\theta$，並且

$$P=a^2c^2+b^2s^2,\qquad Q=a^2s^2+b^2c^2,\qquad y=\sqrt{P}+\sqrt{Q}.$$

先看兩個特殊情況。若 $a^2=b^2$，則對每一個 θ 都有 $P=Q=a^2$，所以 $y=2|a|$ 是常數，每一點都（平凡地）是駐點（stationary point）；這個情況暫且擱下。若 $a=0$ 或 $b=0$（但不同時為零），則 P 或 Q 會在某些 θ 處等於零，而 y 在該處不可微（not differentiable）；這個情況留待最後處理。所以現在先假設 $ab\neq 0$ 且 $a^2\neq b^2$。於是

$P \geq \min(a^2, b^2)(c^2 + s^2) > 0$，同理 $Q > 0$，所以 y 處處可微。

求導得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta} = -2a^2cs + 2b^2sc = (b^2 - a^2)\sin 2\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} = (a^2 - b^2)\sin 2\theta.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{P}} - \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{Q}} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta\,(\sqrt{Q} - \sqrt{P})}{2\sqrt{PQ}}.$$

要看出 $\sqrt{Q} - \sqrt{P}$ 的正負，可以把它有理化（rationalise）：

$$\sqrt{Q} - \sqrt{P} = \frac{Q - P}{\sqrt{Q} + \sqrt{P}}, \qquad Q - P = (a^2 - b^2)(s^2 - c^2) = (b^2 - a^2)\cos 2\theta.$$

代入上式，並利用 $2\sin 2\theta \cos 2\theta = \sin 4\theta$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin 4\theta}{4\sqrt{PQ}\,(\sqrt{P} + \sqrt{Q})}.$$

想一想 為甚麼值得花工夫把 $\sqrt{Q} - \sqrt{P}$ 有理化？

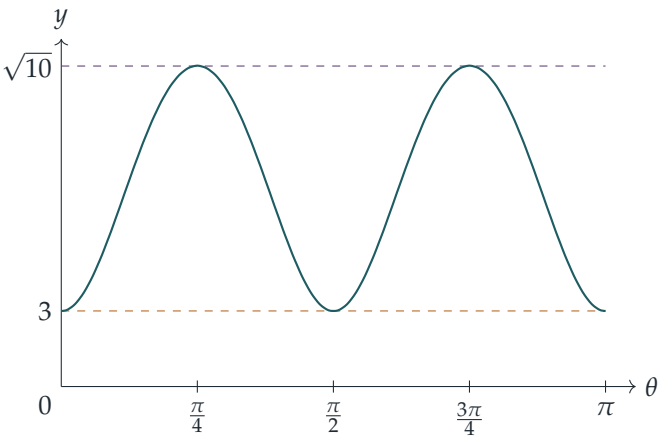
因為這樣一來，除了 $\sin 4\theta$ 之外，其餘各項一眼就看得出是正數：$(a^2 - b^2)^2 > 0$，而 P、Q 都是正數。所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ 的正負與 $\sin 4\theta$ 完全相同，這既告訴我們駐點在哪裏，也告訴我們它們屬於哪一類。

駐點出現在 $\sin 4\theta = 0$ 之處，即 $\theta = \frac{1}{4}n\pi$，其中 n 為整數。

- 當 n 為偶數時，$\theta = \frac{1}{2}k\pi$，所以 $\{c^2, s^2\} = \{1, 0\}$，$\{P, Q\} = \{a^2, b^2\}$。此時 $y = |a| + |b|$（記住 $\sqrt{a^2} = |a|$）。
- 當 n 為奇數時，$\theta = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$，所以 $c^2 = s^2 = \frac{1}{2}$，$P = Q = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$。此時 $y = 2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$。

駐點的性質。當 θ 遞增經過 $\frac{1}{2}k\pi$ 時，$\sin 4\theta$ 由負變正，所以 y 由遞減轉為遞增：這些點是**極小點（minima）**。當 θ 遞增經過 $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$ 時，$\sin 4\theta$ 由正變負，所以這些點是**極大點（maxima）**。

下圖顯示 $a = 2$、$b = 1$ 的情況，縱軸的比例經過拉長：y 在 3 與 $\sqrt{10} \approx 3.162$ 之間振盪，週期（period）為 $\frac{1}{2}\pi$。



最後的不等式

把 θ 換成 $\theta+\frac{1}{2}\pi$，c^2 與 s^2 便會對調，於是 P 與 Q 也對調，所以 y 的週期為 $\frac{1}{2}\pi$。在一個週期 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上，y 在 $[0,\frac{1}{4}\pi]$ 上遞增，在 $[\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 上遞減（由 $\sin 4\theta$ 的正負可知），所以它的最小值是 $|a|+|b|$，在兩個端點取得；最大值是 $\sqrt{2a^2+2b^2}$，在 $\frac{1}{4}\pi$ 取得。根據週期性，這兩個值就是對所有 θ 而言的最小值和最大值，所以

$$|a|+|b| \;\le\; y \;\le\; \sqrt{2a^2+2b^2}.$$

這兩個界並無矛盾：把第一部分的結果應用於 $|a|$ 和 $|b|$，得 $(|a|+|b|)^2 \le 2a^2+2b^2$，所以下界確實不會超過上界。

先前擱下的情況。若 $a^2=b^2$，則 $y=2|a|$，而 $|a|+|b|=2|a|$，$\sqrt{2a^2+2b^2}=\sqrt{4a^2}=2|a|$，所以不等式處處以等號成立。若 $b=0$，則 $y=|a|\big(|\cos\theta|+|\sin\theta|\big)$。由於每一項都不超過 1，故 $|\cos\theta|+|\sin\theta| \ge \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，而由第一部分可知 $(|\cos\theta|+|\sin\theta|)^2 \le 2$；所以 $|a| \le y \le \sqrt{2}\,|a|$，這正是所求的不等式。$a=0$ 的情況相同，只需把 a 與 b 對調；而 $a=b=0$ 的情況是平凡的。這就證明了結果對所有 a、b 和 θ 都成立。 ■

驗算

- 取 $a=2$、$b=1$：$y(0)=2+1=3$，$y(\frac{1}{4}\pi)=2\sqrt{5/2}=\sqrt{10}\approx 3.1623$；以數值方法對大量 θ 值掃描 y，結果都落在這兩個值之間。
- 導數公式與 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ 的有限差分（finite-difference）估計值相符，在隨機選取的 a、b、θ 下誤差約為 10^{-9}。
- 當 $a=b$ 時，兩個界都退化為 $2|a|$，與 y 為常數的情況吻合。

常見錯誤

- 寫成 $\sqrt{a^2} = a$：最小值是 $|a| + |b|$，這正是答案中出現絕對值（modulus）的原因。
- 只做到 $\sin 2\theta = 0$ 就停下來，漏掉了位於 $\frac{1}{4}\pi$ 的奇數倍之處的駐點，在那裏 $\sqrt{P} = \sqrt{Q}$。
- 毫無理由就斷定某些點是極大點或極小點；利用 $\sin 4\theta$ 的正負，一行就能給出理由。

STEP 之外

從幾何上看，$\sqrt{P}$ 是橢圓（ellipse）$x = a\cos\phi$，$y = b\sin\phi$ 的中心到橢圓上某一點的距離，而 $\sqrt{Q}$ 是中心到參數再轉四分之一圈之後那一點的距離，所以這道題探討的是這兩條「共軛」半徑如何攤分固定的總和 $a^2 + b^2$。這兩個界同時也是向量 (a, b) 的 ℓ^1 範數（norm）和（經縮放的）ℓ^2 範數，而像這樣比較範數，是大學一年級分析（analysis）和線性代數（linear algebra）中的常用工具。想進一步了解如何利用導數證明不等式，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。