詳細解答

STEP I 2002，第 2 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP I 2002，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q2

關鍵思路

多項式 $x^m(x-1)^n$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 處為零，所以曲線在兩者之間必定要轉向。用乘積法則（product rule）求導，並且把所有公因式（*common factor*）都提出來：導數（derivative）於是分解成幾個簡單的部分，各部分的正負號一目了然。整個草圖由奇偶性（parity）決定：某個冪是偶數還是奇數，決定了曲線是與軸相切還是穿過軸，也決定了曲線在軸的哪一側。

解答

駐點

由乘積法則，

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= mx^{m-1}(x-1)^n + nx^m(x-1)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}[m(x-1)+nx] \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}[(m+n)x-m]. \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{f}'(x)=0$ 當且僅當 $x=0$、$x=1$ 或

$$x = x_0 = \frac{m}{m+n}.$$

由於 $m,n>0$，我們有 $0<m<m+n$，所以 $0<x_0<1$。這就是所求的駐點(stationary point)。(由於 $m,n\geq 2$，冪 $m-1$ 和 $n-1$ 都至少是 1，所以 $x=0$ 和 $x=1$ 也是駐點。畫草圖時會用到它們。)

駐點的性質

把導數寫成 $\mathrm{f}'(x) = g(x)\,h(x)$，其中 $g(x) = x^{m-1}(x-1)^{n-1}$，$h(x) = (m+n)x - m$。那麼

$$\mathrm{f}''(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = g'(x)h(x) + (m+n)g(x).$$

> **想一想** 我們真的需要把 g 完整地求導嗎？

不需要。在 x_0 處我們有 $h(x_0) = 0$，所以無論 g' 是甚麼，第一項都會消失：

$$\mathrm{f}''(x_0) = (m+n)\,x_0^{m-1}\,(x_0-1)^{n-1}.$$

這裏 $m+n > 0$，$x_0^{m-1} > 0$，但 $x_0 - 1 < 0$。所以 $\mathrm{f}''(x_0)$ 不為零，其正負號與 $(-1)^{n-1}$ 相同：

- 若 n 是偶數，則 $n-1$ 是奇數，$\mathrm{f}''(x_0) < 0$，x_0 是**極大點（maximum）**；
- 若 n 是奇數，則 $n-1$ 是偶數，$\mathrm{f}''(x_0) > 0$，x_0 是**極小點（minimum）**。

因為 $\mathrm{f}''(x_0) \neq 0$，二階導數判別法（second-derivative test）可以下定論。這正是我們要證明的。

草圖

四種情況由 m 和 n 的奇偶性決定。要畫出每一種情況，我們先整理以下事實。

f 的正負號。當 $x > 1$ 時，兩個因式都是正的，所以 $\mathrm{f} > 0$。當 $0 < x < 1$ 時，$x^m > 0$，而 $(x-1)^n$ 的正負號與 $(-1)^n$ 相同。當 $x < 0$ 時，正負號是 $(-1)^m(-1)^n = (-1)^{m+n}$。

在根（*root*）附近的表現。在 $x = 0$ 附近，我們有 $\mathrm{f}(x) \approx (-1)^n x^m$。若 m 是偶數，f 在 0 的兩側保持同號，所以曲線在該處與軸相切（一個轉向點（turning point））。若 m 是奇數，f 變號，又因為 $\mathrm{f}'(0) = 0$，曲線會水平地穿過軸（一個駐拐點（stationary point of inflection））。把同樣的推理用於 n，便得到 $x = 1$ 處的情況。

兩端。當 $|x|$ 很大時，$\mathrm{f}(x)$ 的表現與 x^{m+n} 相似，所以當 $x \to +\infty$ 時 $\mathrm{f} \to +\infty$。當 $x \to -\infty$ 時，若 $m+n$ 是偶數則 $\mathrm{f} \to +\infty$，若 $m+n$ 是奇數則 $\mathrm{f} \to -\infty$。

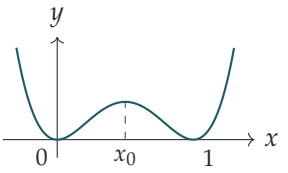
沒有其他駐點。駐點只有 $x = 0$、x_0 和 $x = 1$。

綜合以上各點：

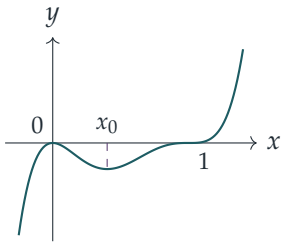
- **m 為偶數，n 為偶數：**處處皆有 $\mathrm{f} \geq 0$。在 0 和 1 處有位於軸上的極小點，在 x_0 處有一個極大點：呈 W 形。
- **m 為偶數，n 為奇數：**曲線由 $-\infty$ 上升，在 0 處從下方與軸相切（一個極大點），下降至 x_0 處的極小點，然後上升，經過 1 處的駐拐點，一直升向 $+\infty$。

- **m 為奇數，n 為偶數：**曲線由 $-\infty$ 上升，經過 0 處的駐拐點，到達 x_0 處的極大點，下降至 1 處與軸相切（一個極小點），然後升向 $+\infty$。
- **m 為奇數，n 為奇數：**曲線由 $+\infty$ 下降，經過 0 處的駐拐點，到達 x_0 處的極小點，再回升經過 1 處的駐拐點，一直升向 $+\infty$。

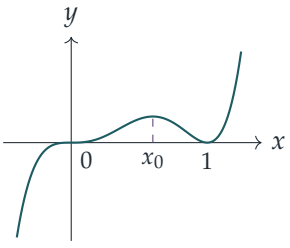
以下草圖採用最小的情況 $(m,n) = (2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$，每幅圖各有自己的縱軸比例。在 x_0 處的值都很小：分別是 $\frac{1}{16}$、$-\frac{108}{3125}$、$\frac{108}{3125}$ 和 $-\frac{1}{64}$。



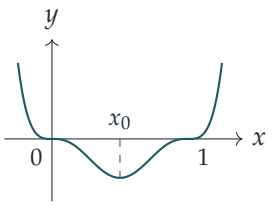
m 為偶數，n 為偶數



m 為偶數，n 為奇數



m 為奇數，n 為偶數



m 為奇數，n 為奇數

驗算

- 取 $m = n = 2$：$\mathrm{f}(x) = \big(x(x-1)\big)^2$ 關於 $x = \frac{1}{2}$ 對稱，而 $x_0 = \frac{1}{2}$ 確實是極大點，其值為 $\frac{1}{16}$。
- 代換 $x \mapsto 1-x$ 把 $x^m(x-1)^n$ 變成 $(-1)^{m+n}x^n(x-1)^m$。所以把 m 和 n 對調，相當於把圖像沿 $x = \frac{1}{2}$ 反射（若 $m+n$ 是奇數，還要再沿 x 軸反射）。這就是兩幅奇偶性相異的草圖互為鏡像的原因。
- 我們把 f' 與數值導數作了比對，又把 $\mathrm{f}''(x_0)$ 的正負號與有限差分（finite difference）作了比對，範圍涵蓋所有 $2 \le m,n \le 8$。例如當 $(m,n) = (2,3)$ 時，$\mathrm{f}''(\frac{2}{5}) = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} = 0.72 > 0$，是極小點，與預測相符。

常見錯誤

- 把 $f''(x)$ 完整展開。在 x_0 處，因式 $(m+n)x - m$ 為零，所以只有一項留下來。
- 忘記 $x = 0$ 和 $x = 1$ 也是駐點（因為 $m, n \geq 2$），結果把曲線畫成在該處斜斜地穿過軸。
- 弄錯 $x < 0$ 時的正負號。它取決於 $m + n$，而不是單單取決於 m。

STEP 之外

多項式在重數（multiplicity）為 k 的根附近，局部形狀與 $c(x-a)^k$ 相似，而 k 的奇偶性決定了曲線是相切還是穿過。這是邁向泰勒定理（Taylor's theorem）和駐點的高階導數判別法的第一步：若駐點處第一個不為零的導數是 k 階的，則當 k 是偶數時該點是轉向點，當 k 是奇數時該點是拐點。Abbott 的 *Understanding Analysis* 為這些想法建立了嚴格的基礎。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。