詳細解答

STEP I 2002，第 14 題

概率與統計 • 概率中的等比級數

> **STEP I 2002，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q14

關鍵思路

以我總共按了多少個號碼作為條件（conditioning）。這個數目一旦確定，警鐘響起與我取得款項之間相隔的時間也隨之確定，於是警察先到的概率就是對應該段時間的 $1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$。再對嘗試次數取平均，便得出答案。在兩種方案中，這個平均都會化為以 $q=\mathrm{e}^{-\lambda/r}$ 為公比的等比級數（geometric series），所以值得及早為 q 命名。

解答

順序按鍵

設 K 為我的號碼在 $1,2,\ldots,n$ 這列數中的位置。那麼 K 就是我嘗試的次數，而且對 $k=1,\ldots,n$ 有 $P(K=k)=\frac{1}{n}$。

假設 $K=k$。我每分鐘按 r 個號碼，所以相鄰兩個號碼相隔 $1/r$ 分鐘。時間由我按下第一個號碼的一刻起計。

- 若 $k=1$，第一個號碼就是正確的，我從未輸入過錯誤號碼，警察也不會接到通知。警察先到的概率是 $0=1-\mathrm{e}^{0}$。
- 若 $k\geq 2$，第一個號碼是錯的，所以警鐘在時間 0 響起，而正確號碼是第 k 個，在時間 $(k-1)/r$ 輸入。如果警察在 $t=(k-1)/r$ 分鐘內到達，他們就會在我取得款項之前到達，其概率為 $1-\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r}$。

因此公式 $1-\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r}$ 適用於所有 k，包括 $k=1$。設 A 為「警察在我取得款項之前到

達」這個事件。根據全概率公式（law of total probability），

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(K=k)\,P(A \mid K=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r}}{n},$$

正如題目所求。

為了化簡，設 $q = \mathrm{e}^{-\lambda/r}$。由於 $\lambda, r > 0$，我們有 $0 < q < 1$，而且 $\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r} = q^{k-1}$。所以

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 - \frac{1-q^n}{n(1-q)} \\ &= 1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda n/r}}{n\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda/r}\right)}, \end{aligned}$$

這裏用了等比級數求和，因為 $q \neq 1$，所以這一步成立。

隨機按鍵

現在每次嘗試都是從 $1, \ldots, n$ 中均勻地重新抽出一個號碼，與之前的嘗試獨立（independent）（我不記得自己試過哪些號碼）。所以每次嘗試正確的概率都是 $\frac{1}{n}$，而且各次互相獨立。若 N 是直至按中正確號碼為止（包括該次）的嘗試次數，則 N 服從幾何分佈（geometric distribution）：

$$P(N=k) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

想一想 當號碼可以重複時，關於時間的論證是否仍然成立？

成立。警察在第一個錯誤號碼出現時接到通知，而若 $N = k \geq 2$，那正是第一次嘗試，發生在時間 0。款項在第 k 次嘗試時到手，即時間 $(k-1)/r$。重複號碼只會改變 N 的分佈，不會改變時間的計算。所以與之前完全一樣，$P(A \mid N=k) = 1 - q^{k-1}$，而這對 $k = 1$ 也是對的。

記 $p = \frac{n-1}{n}$。那麼

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{k-1}\left(1 - q^{k-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} (pq)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-p} - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-pq}. \end{aligned}$$

把和式拆開是可以的，因為兩個級數都收斂（converge）：$0 \leq p < 1$ 而且 $0 < pq < 1$。第一項是 $\frac{1}{n}\cdot n = 1$，這只不過是說 N 必定是有限的。至於第二項，

$$n(1-pq) = n - (n-1)q,$$

所以

$$P(A) = 1 - \frac{1}{n - (n-1)\mathrm{e}^{-\lambda/r}},$$

正如題目所求。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，永遠不會出現錯誤號碼，而兩條公式都給出 0：第一條是因為 $1 - q^1 = 1 - q$，第二條是因為分母等於 1。
- 當 $\lambda \to \infty$（警察即時到達）時，$q \to 0$，兩個答案都趨向 $1 - \frac{1}{n}$。這正是第一次嘗試出錯的概率，理應如此。
- 隨機按鍵應該較差。取 $n = 5$、$\lambda = 0.7$、$r = 3$，順序按鍵得 0.3382，隨機按鍵得 0.4543。兩種方案各做 2×10^5 次模擬試驗，結果分別是 0.339 和 0.456。

常見錯誤

- 把時間寫成 k/r 而不是 $(k-1)/r$。計時由第一個（錯誤的）號碼開始，所以第 k 個號碼是在 $k-1$ 個間隔之後出現。
- 在隨機的情況下，給每個 k 的概率都是 $\frac{1}{n}$，或者求和只加到 n 為止。既然容許重複，N 服從幾何分佈，而且沒有上界。

STEP 之外

這裏警察的到達時間是一個指數隨機變量（exponential random variable），而整個計算就是對隨機的 X 求 $P(T < X)$，方法是以 X 為條件。當 X 服從幾何分佈時，答案有簡潔的閉合形式（closed form），因為 $E\left(q^X\right)$ 正是 X 的概率生成函數（probability generating function）在 q 處的值。事實上，兩個答案都是 $1 - E\left(q^{N-1}\right)$。生成函數和指數分佈是大學一年級概率論的核心內容。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對兩者都有很好的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。