詳細解答

STEP I 2002，第 13 題

概率與統計 • 條件期望值

> **STEP I 2002，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q13

關鍵思路

(U, V) 只有六個可能的組合，所以整件事歸結為一個小小的聯合概率（joint probability）表，再對每種情況做少許代數運算。對於二次方程，V 的正負號決定一切，因為 U^2 最多是 1。對於三次方程，各項係數與 U 和 V 糾纏得令人起疑；這強烈暗示它可以因式分解（factorise），而一旦分解出來，各個根便一目了然。

解答

首先建立聯合分佈（joint distribution）。由於 $\mathrm{P}(U = u,\, V = v) = \mathrm{P}(U = u)\,\mathrm{P}(V = v \mid U = u)$，而對每個 u 都有 $\mathrm{P}(U = u) = \frac{1}{3}$，

	$U = 1$	$U = 0$	$U = -1$
$V = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
$V = -1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

六個數值加起來是 1，理應如此。

第 (i) 部分

$x^2 + Ux + V = 0$ 的兩個根皆為實數，當且僅當判別式（discriminant）非負：$U^2 - 4V \geq 0$。

- 若 $V = -1$，判別式為 $U^2 + 4 > 0$，所以無論 U 取甚麼值，兩個根都是實數（而且相異）。
- 若 $V = 1$，由於 $U^2 \leq 1$，判別式為 $U^2 - 4 \leq 1 - 4 < 0$。所以兩個根永遠不是實數。

因此，兩個根皆為實數當且僅當 $V=-1$，而

$$\mathrm{P}(\text{兩根皆為實數})=\mathrm{P}(V=-1)=\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{9}=\tfrac{4+3+2}{18}=\tfrac{1}{2},$$

正是所求。

第 (ii) 部分

根據第 (i) 部分，以「兩根皆為實數」為條件，等同於以 $V=-1$ 為條件。把表中最下一行除以 $\mathrm{P}(V=-1)=\frac{1}{2}$，得

$$\mathrm{P}(U=1\mid V=-1)=\tfrac{4}{9},\qquad \mathrm{P}(U=0\mid V=-1)=\tfrac{1}{3},\qquad \mathrm{P}(U=-1\mid V=-1)=\tfrac{2}{9}.$$

? **想一想** 為甚麼這裏不能直接用 $\mathrm{P}(U=u)=\frac{1}{3}$？

因為 U 與 V 並非獨立（independent）：知道 $V=-1$ 之後，$U=1$ 的可能性便會提高（因為當 $U=1$ 時，$V=-1$ 的概率是 $\frac{2}{3}$）。我們要求的是條件期望值，所以權重必須是條件概率（conditional probability）。

當 $V=-1$ 時，方程為 $x^2+Ux-1=0$，其較大的根是

$$R=\frac{-U+\sqrt{U^2+4}}{2}.$$

所以當 $U=1$ 時 $R=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$，當 $U=0$ 時 $R=1$，當 $U=-1$ 時 $R=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R\mid\text{兩根為實數})&=\tfrac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\tfrac{1}{3}\cdot 1+\tfrac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\&=\frac{4\sqrt{5}-4+6+2\sqrt{5}+2}{18}\\&=\frac{6\sqrt{5}+4}{18}=\frac{3\sqrt{5}+2}{9}.\end{aligned}$$

第 (iii) 部分

常數項是 U，這提示我們有因式 $(x+U)$。果然

$$\begin{aligned}(x+U)(x^2-2Vx+1)&=x^3-2Vx^2+x+Ux^2-2UVx+U\\&=x^3+(U-2V)x^2+(1-2UV)x+U,\end{aligned}$$

這正是題目給出的三次式。所以方程的根是 $x=-U$，連同 $x^2-2Vx+1=0$ 的根。由於 $V=\pm1$ 給出 $V^2=1$，這個二次方程的判別式為 $4V^2-4=0$。所以它有重根（repeated root）$x=V$，而三次方程就是

$$(x+U)(x-V)^2=0,$$

其根為 $-U$、V、V。

三個根全為正數，當且僅當 $-U > 0$ 且 $V > 0$，即 $U = -1$ 且 $V = 1$。（當 $U = 0$ 時，其中一個根是 0，並非正數。）從表中可得

$$\mathrm{P}(\text{所有根皆為正數}) = \mathrm{P}(U = -1,\, V = 1) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9}.$$

驗算

- 條件概率 $\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$ 加起來是 1。
- 第 (ii) 部分的答案約為 0.967。它必須介乎較大根的最小可能值 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0.618$ 與最大可能值 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 1.618$ 之間，而且應該低於中間值 1，因為最小的根所佔的權重最大。結果確是如此。
- 在第 (iii) 部分，試代入 $U = -1$、$V = 1$：三次式變成 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$，根為 $1, 1, 1$，全是正數。再試 $U = 1$、$V = 1$：三次式變成 $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$，它有負根 -1。
- 我們以分數對六種情況逐一精確枚舉，並在每種情況下以數值方法求出三次方程的根，從而確認了全部三個答案。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分使用無條件的權重 $\frac{1}{3}$，結果得出 $\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}+1\right) \approx 1.079$。
- 在第 (iii) 部分把 $U = 0$ 也計算在內：等於 0 的根並非正數。
- 試圖用判別式或正負號變化來分析三次方程，而不去尋找因式分解。

STEP 之外

這道題的核心是條件期望值（conditional expectation）$\mathrm{E}(X \mid A)$，計算方法是以條件概率重新加權。到了大學，這個概念會發展成本身就是一個隨機變量（random variable）的條件期望值 $\mathrm{E}(X \mid Y)$，以及塔式法則（tower law）$\mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X \mid Y)\big) = \mathrm{E}(X)$，後者能令許多困難的期望值計算變得輕而易舉。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）對此有清晰的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。