詳細解答

STEP I 2002，第 12 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP I 2002，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q12

關鍵思路

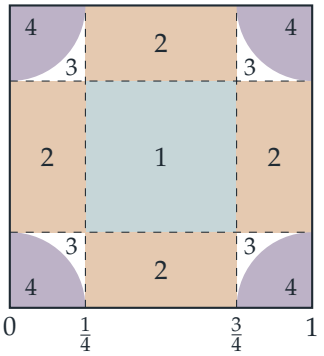
方格網不斷重複，所以「隨機放下馬蹄」的意思，就是馬蹄的中心在一個單位正方形上均勻分佈（uniformly distributed）。馬蹄碰到多少個方格，只取決於中心離該正方形的邊和角有多近，因此每個答案都對應正方形內的一個區域，而它的概率就是該區域的面積。求出四個概率之後，餘下的工作就是把這些概率及其平均值，與 Harry 的實際表現作比較。

解答

Harry 答案的分佈

設馬蹄的中心 C 位於單位正方形 $0 \leq x \leq 1$、$0 \leq y \leq 1$ 之內。若 Harry 隨機放下馬蹄，則由方格網的週期性（periodicity）可知 C 在這個正方形上均勻分佈，所以 C 落在某個區域內的概率就是該區域的面積。設 N 為被馬蹄部分覆蓋的方格數目。

馬蹄的半徑為 $\frac{1}{4}$，小於 $\frac{1}{2}$，所以它最多只能跨過一條垂直格線和一條水平格線。它跨過垂直格線，當且僅當 $x < \frac{1}{4}$ 或 $x > \frac{3}{4}$；它跨過水平格線，當且僅當 $y < \frac{1}{4}$ 或 $y > \frac{3}{4}$。（與格線的距離剛好等於 $\frac{1}{4}$ 的位置面積為零，所以可以不理。）



「跨過垂直格線」和「跨過水平格線」這兩個事件的概率各為 $\frac{1}{2}$，而且兩者獨立（independent），因為 x 和 y 是互相獨立的均勻坐標。所以：

- $N = 1$ 即馬蹄沒有跨過任何格線：此時 C 位於中央邊長為 $\frac{1}{2}$ 的正方形內，所以 $\mathrm{P}(N=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$。
- $N = 2$ 即馬蹄剛好跨過一條格線：$\mathrm{P}(N=2) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。
- 當馬蹄跨過垂直和水平格線各一條時，C 位於四個邊長為 $\frac{1}{4}$ 的角落正方形其中之一，總概率為 $\frac{1}{4}$。這兩條格線相交於方格網的一個格點，而馬蹄覆蓋該格點周圍全部四個方格的一部分，當且僅當它覆蓋該格點本身。

想一想 在角落正方形內，為甚麼答案取決於與格點的距離？

考慮最接近原點的角落正方形，即 $0 < x < \frac{1}{4}$ 及 $0 < y < \frac{1}{4}$。馬蹄必定碰到 C 所在的方格、它左邊的方格和它下面的方格。至於對角的方格 $x < 0$、$y < 0$，其中最接近的點是原點，與 C 的距離為 $\sqrt{x^2+y^2}$，所以馬蹄進入這個方格，當且僅當 $\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{4}$。因此，當 C 與某個格點的距離小於 $\frac{1}{4}$ 時 $N = 4$，否則 $N = 3$。

單位正方形內與其中一個頂點的距離小於 $\frac{1}{4}$ 的點，組成四個半徑為 $\frac{1}{4}$ 的四分之一圓盤，總面積為 $\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$。因此

$$\mathrm{P}(N=1) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(N=2) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(N=3) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}, \qquad \mathrm{P}(N=4) = \tfrac{\pi}{16}.$$

目前的證據與「隨機的馬」是否吻合？

當正確答案是 $4 \div 4 = 1$ 時，一匹隨機的馬答對的概率是 $\mathrm{P}(N=1) = \frac{1}{4}$。當正確答案是 $2+2=4$ 時，牠答對的概率是 $\mathrm{P}(N=4) = \frac{\pi}{16} \approx 0.196$。這正正就是觀察所得的成功率，所以答案是肯定的：這些證據與我的懷疑完全吻合，即 Harry 只是隨機放下馬蹄。

答案的期望值，以及換一匹新馬

若 Harry 隨機放下馬蹄，他的答案便與題目無關，所以他的答案的期望值（expected value）就是 $\mathrm{E}(N)$（各個正確答案出現的頻率相同這一點，在這裏不起作用）：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= 1\cdot\tfrac{1}{4} + 2\cdot\tfrac{1}{2} + 3\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}\right) + 4\cdot\tfrac{\pi}{16} \\ &= \tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{\pi}{16} \\ &= 2 + \tfrac{\pi}{16} \approx 2.20.\end{aligned}$$

把觀察所得的平均值 2 與兩個假設作比較。

- *Harry 計算正確*。正確答案是 $1, 2, 3, 4$，各自出現的次數相同，所以平均值應為 $\frac{5}{2}$。平均值 2 遠低於此，所以 Harry 肯定答錯了很多題。事實上，每個錯誤答案最多比正確答案小 3，而平均少了 $\frac{1}{2}$，所以他的答案中至少有 $\frac{1}{6}$ 是錯的。
- *Harry 是隨機的*。平均值應接近 $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.20$。單一答案的方差（variance）為 $\mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)^2 = \frac{9}{2} + \frac{7\pi}{16} - \left(2 + \frac{\pi}{16}\right)^2 \approx 1.05$，所以做了 n 道題之後，平均值的標準差（standard deviation）約為 $1.02/\sqrt{n}$。題目「很多」的時候（例如 $n = 400$，標準差約為 0.05），平均值 2 低了大約四個標準差，純粹出於偶然的可能性極低。

所以，做了很多道題之後，平均值 2 即使對一匹隨機放下馬蹄的馬來說也太低：Harry 似乎偏好較小的答案，彷彿他下蹄很輕，或者瞄準方格的中央。無論如何，他並沒有在做計算，而且表現比一匹隨機的馬還要差。是的：是時候換一匹新馬了（不過也許該找一匹會做算術的）。

驗算

- 四個概率之和為一：$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = 1$，而 $\mathrm{P}(N = 3) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} \approx 0.054$ 為正數，這是必須的。
- 模擬（simulation）400 000 次隨機放下馬蹄，並數出與中心的距離小於 $\frac{1}{4}$ 的方格數目，所得的相對頻率為 0.2495、0.4990、0.0547、0.1968，平均值為 2.199，而理論值為 $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.196$。
- 合理性檢查：若馬蹄非常小，答案幾乎總是 1，平均值會趨向 1。馬蹄愈大，答案愈大，而我們的情況介乎兩者之間。

常見錯誤

- 以為馬蹄只要跨過兩條格線，就一定覆蓋四個方格。其實它還要碰到兩條格線相交的格點，而 π 正是因此而出現。

► 因為平均值 2「低於 2.5」，就把它當作隨機的證據。隨機的假設所預測的平均值約為 2.2，所以必須與這個數值比較，並考慮平均值的離散程度。

STEP 之外

這就是幾何概率（geometric probability）：當一點在某個區域上均勻分佈時，概率就是面積。同樣的想法可以用來處理蒲豐投針問題（Buffon's needle），其答案同樣涉及 π，十分著名。最後一部分讓你初嘗假設檢驗（hypothesis testing）的滋味：利用中心極限定理（central limit theorem）來判斷在某個模型之下，觀察所得的平均值是否合理。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）涵蓋了連續均勻分佈，以及這類論證背後的極限定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。