詳細解答

STEP I 2002，第 11 題

力學 • 彈性斜碰撞

STEP I 2002，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

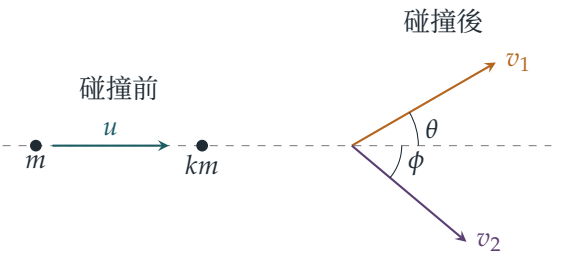
step.maths.org/questions/02-s1-q11

關鍵思路

一次碰撞給我們兩條守恆定律：動量（momentum）守恆（動量是向量，所以有兩條分量方程），以及動能（kinetic energy）守恆（因為沒有能量損失）。兩條動量方程對於碰撞後的未知速率而言是線性的，所以我們可以解出這些速率，並以角度表示。再代入能量方程，便可消去所有速率，只剩下角度與 k 之間的關係式。

解答

我們把 P_1 和 P_2 看成在平面上運動的質點（particle），並假設碰撞期間沒有外力作用。設 P_1 以速率 $u > 0$ 沿 x 軸趨近，並設碰撞後的速率分別為 v_1（P_1 的速率，方向在軸的上方，與軸成角 θ）和 v_2（P_2 的速率，方向在軸的下方，與軸成角 ϕ），其中 $0 < \theta < \pi$ 及 $0 < \phi < \pi$。



恆等式

沿原來的運動方向及與之垂直的方向應用動量守恆，（約去 m 後）得

$$v_1\cos\theta + kv_2\cos\phi = u,$$
$$v_1\sin\theta - kv_2\sin\phi = 0,$$

其中出現負號，是因為 P_2 向軸的另一側離開。由動能守恆，約去 $\frac{1}{2}m$ 後得

$$v_1^2 + kv_2^2 = u^2. \qquad (*)$$

兩條動量方程是關於兩個未知量 v_1 和 kv_2 的線性方程。把第一式乘以 $\sin\phi$，第二式乘以 $\cos\phi$，然後相加：含 kv_2 的項互相抵消，於是

$$v_1(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = u\sin\phi, \qquad \text{所以} \qquad v_1 = \frac{u\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}.$$

同樣地，把第一式乘以 $\sin\theta$，第二式乘以 $\cos\theta$，然後相減，得

$$kv_2 = \frac{u\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}.$$

想一想 我們可以除以 $\sin(\theta+\phi)$ 嗎？

我們需要 $\theta+\phi \neq \pi$（它嚴格介乎 0 與 2π 之間）。若 $\theta+\phi = \pi$，則 $\sin\phi = \sin\theta$ 及 $\cos\phi = -\cos\theta$。第二條動量方程變成 $(v_1 - kv_2)\sin\theta = 0$，而 $\sin\theta \neq 0$，所以 $v_1 = kv_2$。這時第一條方程變成 $(v_1 - kv_2)\cos\theta = u$，即 $0 = u$，這是不可能的。因此 $\sin(\theta+\phi) \neq 0$，這個除法並無問題。

現在把結果代入 $(*)$，並把 kv_2^2 寫成 $(kv_2)^2/k$：

$$\frac{u^2\sin^2\phi}{\sin^2(\theta+\phi)} + \frac{u^2\sin^2\theta}{k\sin^2(\theta+\phi)} = u^2.$$

全式乘以 $k\sin^2(\theta+\phi)/u^2$（此數不等於零），得

$$\sin^2\theta + k\sin^2\phi = k\sin^2(\theta+\phi),$$

這正是所要證明的結果。

（從幾何角度看，動量方程表示動量 mv_1、kmv_2 和 mu 構成一個三角形，其內角為 ϕ、θ 和 $\pi-(\theta+\phi)$，而上面兩個表達式不過是這個三角形的正弦定理（sine rule）。）

兩條路徑互相垂直

若兩條路徑互相垂直，則 $\theta+\phi = \frac{\pi}{2}$，所以 $\sin^2(\theta+\phi) = 1$ 及 $\sin\theta = \cos\phi$。恆等式變成

$$\cos^2\phi + k\sin^2\phi = k, \qquad \text{即} \qquad \cos^2\phi = k(1-\sin^2\phi) = k\cos^2\phi.$$

這裏 $\cos\phi \neq 0$：否則 $\phi = \frac{\pi}{2}$，於是 $\theta = 0$，但題目已說明 θ 不等於零。兩邊除以 $\cos^2\phi$，得 $k = 1$，這正是所要證明的結果。

驗算

- 桌球中為人熟知的事實：兩個質量相等的球作彈性碰撞（elastic collision），而其中一個原本靜止，碰撞後兩球的運動方向互相垂直。我們的結果正是它的逆命題（converse）。
- 一個數值例子：取 $k = 2$ 及 $\phi = 30°$。沿該直線的光滑彈性碰撞會使 P_2 以速率 $\frac{2}{3}u\cos 30°$ 離開，而 P_1 則沿 $\theta = 90°$ 的方向運動。恆等式兩邊都等於 $\frac{3}{2}$。
- 我們亦模擬了 2×10^5 次隨機彈性碰撞（隨機選取 k、u 和碰撞線）。恆等式以及 v_1 和 kv_2 的兩條公式均成立，誤差在 10^{-12} 以內。

常見錯誤

- 把垂直方向的動量方程寫成 $v_1\sin\theta + kv_2\sin\phi = 0$：兩個質點向相反的兩側離開，所以兩個分量的符號相反。
- 在能量方程中漏掉 k，或在最後一步沒有說明為何 $\cos\phi \neq 0$。

STEP 之外

在隨質心（centre of mass）運動的參考系中，彈性碰撞只是把兩個速度旋轉，而大小保持不變。所有這些角度關係，都是把這個由各種可能結果組成的圓映射回實驗室參考系而得出的。這個觀點是處理散射（scattering）的標準方法，由桌球以至粒子物理學皆然。在粒子物理學中，人們利用量度所得的散射角來推算相撞粒子的質量比。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）仔細闡述了以質心處理碰撞的方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。