詳細解答

STEP I 2002，第 10 題

力學 • 彈性碰撞

STEP I 2002，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/02-s1-q10

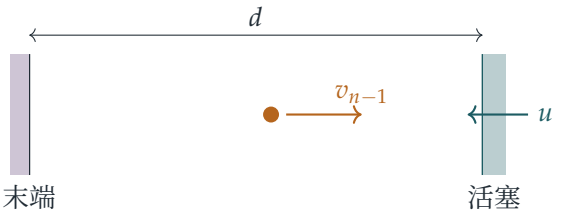
本題在 *Beyond STEP* 第 10.4 節一個分子與一個活塞中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/piston.html

關鍵思路

質點與一面遠比它重的牆發生完全彈性碰撞（perfectly elastic collision）時，相對速度會反向，所以最簡單的做法是在活塞（piston）的參考系（reference frame）中思考：在那裏，質點只是從一面靜止的牆反彈回來。因此，每次與活塞碰撞，速率都會增加 $2u$，而與固定端的碰撞則不會帶來任何改變。至於距離，留意在兩次與活塞碰撞之間，質點和活塞合共走過的長度有固定的規律，由此可得一條以 d_n 表示 d_{n+1} 的線性方程。

解答

我們把空氣模擬為一個質點（particle），把活塞視為一面以恆定速率 u 移動、不受碰撞影響的牆，並把圓筒的末端視為一面固定的牆。所有運動都沿着軸線進行，所以我們取由圓筒末端指向活塞的方向為正方向。



速率

假設質點以速率 w 趨近活塞。活塞的速度為 $-u$，所以質點相對於活塞的速度為 $w+u$（朝向活塞）。在與一面不會被撞偏的牆發生完全彈性碰撞時，根據牛頓實驗定律（Newton's experimental law），取 $e=1$，相對速度會反向，所以碰撞後質點相對於活塞的速度為 $-(w+u)$。它的實際速度於是為

$$-u-(w+u)=-(w+2u),$$

所以它以速率 $w+2u$ 離開活塞。

在圓筒的固定端，同一條定律（此時牆是靜止的）只會令速度反向：速率不變。所以在相鄰兩次與活塞碰撞之間，質點的速率保持不變。

第一次碰撞之前，質點以速率 v 朝活塞運動，所以 $v_1 = v+2u$。剛完成第 n 次碰撞後，它的速率為 v_n；它從末端反彈而速率不變，再以速率 v_n 遇上活塞，離開時速率為 $v_{n+1}=v_n+2u$。由歸納法（induction）可得

$$v_n = v+2nu,$$

正是所求。

距離

在第 n 次與第 $(n+1)$ 次碰撞之間（歷時 t_n），活塞以速率 u 向內移動，所以

$$d_n - d_{n+1} = u\,t_n.$$

在同一段時間內，質點以恆定速率 v_n 運動，由活塞走到末端（距離為 d_n，因為末端與活塞原來的位置相距 d_n），再返回活塞（距離為 d_{n+1}，即活塞此刻所在的位置）。所以

$$d_n + d_{n+1} = v_n t_n.$$

> ? **想一想** 怎樣才能消去 t_n？

把一條方程除以另一條：由於 $t_n>0$，所以

$$\frac{d_n+d_{n+1}}{d_n-d_{n+1}} = \frac{v_n}{u}.$$

交叉相乘，得 $ud_n+ud_{n+1}=v_nd_n-v_nd_{n+1}$，所以

$$(v_n+u)\,d_{n+1} = (v_n-u)\,d_n.$$

由 $v_n=v+2nu$，可得 $v_n-u=v+(2n-1)u$ 及 $v_n+u=v+(2n+1)u$，所以

$$d_{n+1} = \frac{v+(2n-1)u}{v+(2n+1)u}\,d_n,$$

這就是所求的結果。

d_n 的公式

重複應用這個遞推關係（recurrence），

$$d_n = d_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{v+(2k-1)u}{v+(2k+1)u} = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v+(2n-3)u}{v+(2n-1)u}.$$

這個乘積可以逐項相消（telescope）：每個分母都與下一個分子約去，餘下

$$d_n = \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1.$$

當 $n=1$ 時這條式同樣成立，此時它就是 $d_1 = d_1$。

$v = u$ 的情況

代入 $v=u$，得

$$d_n = \frac{2u}{2nu}\, d_1 = \frac{d_1}{n}.$$

然後，由 $ut_n = d_n - d_{n+1}$，

$$ut_n = \frac{d_1}{n} - \frac{d_1}{n+1} = \frac{d_1}{n(n+1)},$$

正是所求。

驗算

- 當 $u=0$ 時，活塞是一面固定的牆：公式給出對所有 n 都有 $v_n = v$ 及 $d_n = d_1$，與預期相符。
- 取 $u=1$、$v=3$、$d_1=75$。公式預測 $d_2=50$、$d_3=37.5$、$d_4=30$，而速率為 $5, 7, 9, 11$。以有理數運算逐步精確模擬反彈過程，所得結果與此完全相同；隨機選取 200 組 u、v 和起始位置，結果亦同樣吻合。
- 當 $v=u$ 時，$\sum ut_n = d_1 \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = d_1$：活塞合共恰好移動了 d_1，到達圓筒的末端，這與 $d_n = d_1/n \to 0$ 一致。

常見錯誤

- 錯用 $d_n - d_{n+1}$，例如把質點來回一趟的路程當作 $2d_n$：活塞在這段時間內已經移動了，所以回程只有 d_{n+1}。
- 每次碰撞只加上 u 而不是 $2u$。相對速度會反向，所以質點速度的改變量是活塞所帶來的趨近速率的兩倍。

STEP 之外

每次碰撞都令質點的速率改變一個固定的量，但隨着間隙收窄，碰撞會愈來愈頻密，而當 n 很大時，乘積 $v_n d_n$ 大致保持不變（這裏當 n 很大時 $v_n d_n \approx (v+u)d_1$）。這種緩慢變化的守恆量稱為絕熱不變量（adiabatic invariant）；對大量分子取平均後，它解釋了為何氣體被迅速壓縮時會變熱：對於一維的緩慢壓縮，$T \propto 1/L^2$。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）是進一步學習碰撞和參考系的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。