詳細解答

STEP I 2002，第 1 題

純數學 • 圓與橢圓

> **STEP I 2002，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q1

關鍵思路

先找出兩個橢圓（ellipse）實際相交之處。兩條方程都只透過 y^2 含有 y，所以消去 y^2 後便得到一條 x 的二次方程，而結果顯示兩個橢圓只相交於兩個實點。通過兩個已知點的圓，其圓心必在這兩點的垂直平分線（perpendicular bisector）上，這樣便把圓的方程確定為一個單參數族（one-parameter family）。

解答

求交點

展開後，兩個橢圓的方程為

$$x^2 + 4x + 2y^2 = 14,$$
$$9x^2 - 18x + 16y^2 = 16.$$

把第一式乘以 8，再減去第二式，便可消去 y^2：

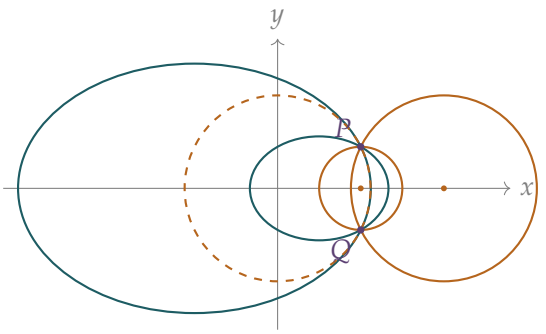
$$8x^2 + 32x - 9x^2 + 18x = 112 - 16 \implies x^2 - 50x + 96 = 0 \implies (x-2)(x-48) = 0.$$

> **想一想** 為甚麼不能把兩個根都保留？

每個根仍須給出實數的 y。由第一個橢圓得 $2y^2 = 14 - x^2 - 4x$。

- $x = 48$：$2y^2 = 14 - 2304 - 192 < 0$，所以沒有實點。（無論如何，第一個橢圓只涵蓋 $-2 - 3\sqrt{2} \le x \le -2 + 3\sqrt{2}$。）
- $x = 2$：$2y^2 = 14 - 4 - 8 = 2$，所以 $y = \pm 1$。

因此兩個橢圓恰好相交於兩點，即 $P = (2,1)$ 和 $Q = (2,-1)$。（兩點亦滿足第二條方程：$9 + 16 = 25$。）



圖中所示為兩個橢圓（藍綠色），以及通過 P 和 Q 的其中三個圓（琥珀色），圓心分別為 $(0,0)$、$(2,0)$ 和 $(4,0)$。

通過 P 和 Q 的圓

任何通過 P 和 Q 的圓，其圓心與這兩點等距，所以圓心位於 PQ 的垂直平分線上。線段 PQ 是鉛垂的，中點為 $(2,0)$，所以它的垂直平分線就是 x 軸。因此圓心為 $(a,0)$，其中 a 為某個實數，而半徑滿足

$$r^2 = (2-a)^2 + 1^2.$$

於是圓的方程為

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + y^2 &= (2-a)^2 + 1\\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= 4 - 4a + a^2 + 1\\ x^2 - 2ax + y^2 &= 5 - 4a,\end{aligned}$$

這正是所求的形式。

反過來說，對每個實數 a，這條方程都表示一個真正的圓，圓心為 $(a,0)$，半徑為 $\sqrt{(a-2)^2+1} > 0$，而且它通過 $(2,\pm 1)$，因為 $4 - 4a + 1 = 5 - 4a$。所以這個圓族恰好就是通過兩個交點的所有圓所組成的集合。

想一想 那麼，把兩條方程組合起來這個慣用技巧又如何？

取 $7\times$（第一式）$-$（第二式），可令 x^2 和 y^2 的係數相等，得出 $x^2 - 23x + y^2 + 41 = 0$，這是我們的圓族中 $a = \frac{23}{2}$ 的那一個成員。但這只是一個圓。兩條方程的組合，是通過全部四個（複數）公共點的圓錐曲線（conic），當中包括 $x = 48$ 的兩個非實點；而一個圓只需通過那兩個實點。這就是本題必須採用直接方法的原因。

驗算

- $a = 2$ 給出 $x^2 - 4x + y^2 = -3$，即 $(x-2)^2 + y^2 = 1$：這是以 PQ 為直徑的圓，正如所料。
- $a = 0$ 給出 $x^2 + y^2 = 5$，而確實 $2^2 + 1^2 = 5$。
- 在 $-6 \leq x \leq 6$ 的範圍內以數值方法搜尋同時位於兩個橢圓上的點，只找到 $x = 2$。在 $(2, 1)$ 處，兩個橢圓的法線（normal）方向分別為 $(8, 4)$ 和 $(18, 32)$，兩者並不平行，所以兩個橢圓在該點是真正相交，而不是相切。

常見錯誤

- 保留 $x = 48$，卻沒有檢查 y 是否實數。
- 由兩條橢圓方程的組合得出單獨一個圓後便停下來：題目問的是通過這些點的*任何*圓。

STEP 之外

兩條圓錐曲線的組合 $\lambda E_1 + \mu E_2 = 0$ 稱為**曲線束**（pencil）：它由通過兩者四個公共點的圓錐曲線組成，而這些公共點是在複射影平面（complex projective plane）上計算的。這道題目正好提醒我們，這些點當中有些可能是非實點，而圓是特殊的（所有圓都通過兩個固定的複數點，即「無窮遠圓點」（circular points at infinity））。這些概念屬於射影幾何（projective geometry）和代數幾何（algebraic geometry）的範疇；若想以這種觀點初步認識平面曲線和圓錐曲線，可參閱 Reid 的 *Undergraduate Algebraic Geometry*（一本平易近人的入門書），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多 STEP 風格的練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。