詳細解答

STEP III 2001，第 9 題

力學 • 摩擦力與簡諧運動

STEP III 2001，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s3-q9

關鍵思路

兩條橫樑沿一條與水平成 α 角的直線相距 d，因此木板的傾角就是 α。木板滑動時，它的重量由 B_1 逐漸轉移到 B_2，而兩個法向反作用力（normal reaction）隨重心（centre of gravity）的位置線性地變化。由於兩個摩擦系數（coefficient of friction）不同，總摩擦力也隨之線性變化；回復力（restoring force）與位移成正比，這就是簡諧運動（simple harmonic motion）。條件 $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$ 的作用，正是令這個運動的中心剛好落在兩條橫樑的正中間。

解答

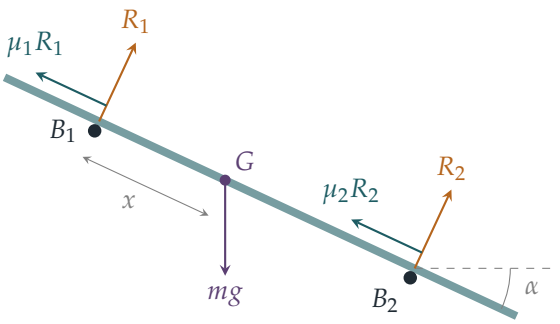
模型

把木板視為質量為 m 的剛性桿（rigid rod），它始終與兩條橫樑保持接觸，而橫樑則視為點。由 B_1 到 B_2 的直線長度為

$$\sqrt{d^2\sin^2\alpha + d^2\cos^2\alpha} = d$$

並與水平成 α 角，所以木板沿這條直線擺放，由 B_1 向下傾斜至 B_2。設 x 為重心 G 與 B_1 的距離，沿木板向斜下方量度，於是釋放時 $x = 0$，而當 $x = d$ 時 G 位於 B_2 之上。

當 $0 \le x \le d$ 時，G 位於兩條橫樑之間。作用於木板的力有：作用於 G 的重量 mg；在 B_1、B_2 處垂直於木板的法向反作用力 R_1、R_2；以及當木板沿斜面向下運動時，沿斜面向上的摩擦力 $\mu_1 R_1$ 和 $\mu_2 R_2$。



法向反作用力

木板在垂直於自身的方向上沒有運動，所以沿垂直於木板的方向分解力，得

$$R_1 + R_2 = mg\cos\alpha.$$

木板也沒有轉動，所以對 G 取力矩（moment）（重量和兩個摩擦力的作用線或通過 G，或沿着木板，因此它們沒有力矩），得

$$R_1 x = R_2(d - x).$$

解這兩條方程，得

$$R_1 = \frac{mg\cos\alpha\,(d-x)}{d}, \qquad R_2 = \frac{mg\cos\alpha\,x}{d}.$$

當 $0 \le x \le d$ 時兩者皆非負，所以木板確實一直擱在兩條橫樑上。

運動方程

當木板沿斜面向下運動時，沿斜面向下分解力，得

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - \mu_1 R_1 - \mu_2 R_2 \\ &= mg\cos\alpha\left[\tan\alpha - \mu_1 - \frac{(\mu_2-\mu_1)x}{d}\right]. \end{aligned}$$

現在使用題目給出的條件：由 $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$ 得 $\tan\alpha - \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$。因此

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - \tfrac{1}{2}d\right), \qquad \text{其中} \qquad \omega^2 = \frac{g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}{d} > 0,$$

不等式成立是因為 $\mu_2 > \mu_1$ 且 $\cos\alpha > 0$。

? **想一想** 木板真的會開始運動嗎？摩擦力是否一直指向斜面上方？

在 $x = 0$ 處，$\ddot{x} = \frac{1}{2}\omega^2 d > 0$，所以木板確實會開始向下滑。上面的方程描述的是以 $x = \frac{1}{2}d$ 為中心的簡諧運動，而由於 $t = 0$ 時 $x = 0$、$\dot{x} = 0$，它的解為

$$x = \tfrac{1}{2}d\,(1 - \cos\omega t), \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}d\,\omega \sin\omega t.$$

當 $0 < t < \pi/\omega$ 時有 $\dot{x} > 0$，所以木板在整段時間內的確一直沿斜面向下運動，假設摩擦力沿斜面向上是正確的。此外，整段時間內 $0 \le x \le d$，所以 G 一直位於兩條橫樑之間，R_1、R_2 的表達式仍然有效。

靜止下來

速度第一次再度為零是在 $\omega t = \pi$ 之時，這時 $x = \frac{1}{2}d(1 - \cos\pi) = d$：重心正好位於 B_2 之上。在這一刻 $R_1 = 0$ 而 $R_2 = mg\cos\alpha$，所以木板只擱在 B_2 上。它會停留在那裏，因為 B_2 處的摩擦力最大可達 $\mu_2 mg\cos\alpha$，而重量沿斜面向下的分量是 $mg\sin\alpha$，並且

$$\mu_2 = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) + \tfrac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) > \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) = \tan\alpha.$$

所以木板靜止下來時，重心位於 B_2 之上，所需時間為

$$\frac{\pi}{\omega} = \pi\left(\frac{d}{g(\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

這正是所要證明的結果。

驗算

- 若 $\mu_2 - \mu_1$ 很小，木板幾乎不減速，所需時間很長，與公式相符。這時每個 μ 都接近 $\tan\alpha$，所以合力在各處都接近零。
- 我們隨機選取 α、d、μ_1（並取 $\mu_2 = 2\tan\alpha - \mu_1$），以數值方法逐步求解運動方程，直至速度第一次回到零為止。例如，取 $\alpha = 0.7$、$d = 2$、$\mu_1 = 0.3$ 及 $g = 9.8$，預測的時間約為 1.56 秒。在每一個情況中，停止的時間和位置都與 π/ω 和 $x = d$ 吻合，（相對）誤差在 10^{-5} 以內。

常見錯誤

- 取 $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}mg\cos\alpha$。反作用力取決於 G 的位置，而正是這種依賴關係產生了振盪。
- 只做到「速度為零」便停筆，沒有檢查木板其後是否保持靜止：你需要 $\mu_2 \ge \tan\alpha$。

STEP 之外

這個運動是一個振子（oscillator）的半個週期，而它的「彈簧」來自隨負載而變的摩擦力。摩擦力取決於位置或速度的系統會產生豐富多變的現象，包括黏滑振盪（stick–slip oscillation），門鉸吱吱作響和琴弓拉動小提琴弦線，背後都是這種振盪。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對摩擦、剛體平衡和簡諧運動都有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。